



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Séries de potência formais para as distribuições estáveis de  
Lévy: o caso simétrico

JOSÉ CRISANTO DA COSTA NETO

NATAL-RN  
JULHO DE 2018

JOSÉ CRISANTO DA COSTA NETO

SÉRIES DE POTÊNCIA FORMAIS PARA AS DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS DE  
LÉVY: O CASO SIMÉTRICO

*Tese de doutorado* apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Física**.

**Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi  
Mohan**

NATAL-RN  
JULHO DE 2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Costa Neto, José Crisanto da.

Séries de potência formais para as distribuições estáveis de Lévy: o caso simétrico / José Crisanto da Costa Neto. - 2018. 106f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Física. Natal, 2018.

Orientador: Madras Viswanathan Gandhi Mohan.

1. Física - Tese. 2. Distribuições estáveis - Tese. 3. Teorema do limite central - Tese. 4. Séries hipergeométricas - Tese. 5. Séries divergentes - Tese. 6. Regularização - Tese. 7. Aproximação em séries - Tese. I. Mohan, Madras Viswanathan Gandhi. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 53



## AGRADECIMENTOS

- A toda minha família, em especial aos meus pais, meu irmão e o meu avô Zeca Crisanto.
- À minha esposa Jonir, que esteve comigo em uma monografia, dissertação e agora nesta tese, por todo seu carinho, companheirismo, incentivo, motivação e muitas outras coisas do qual serei eternamente grato, sem dúvidas ela foi meu porto seguro.
- Ao professor Gandhi, por sua orientação, amizade, compreensão nos momentos difíceis e, acima de tudo, por mostrar que fazer ciência não é uma tarefa fácil, embora seja gratificante e fascinante.
- Aos professores Marcos e Ernesto, por toda contribuição, solicitude e uma infinidade de e-mails trocados durante esses anos.
- Aos professores Dory Hélio e João Medeiros, por fazerem parte da banca e contribuírem para uma maior qualidade do trabalho.
- Aos professores do departamento de Física que contribuíram por todos esses anos de graduação e pós-graduação, por todas as importantes contribuições neste estudo e na minha carreira acadêmica.
- Aos companheiros do Clube do Fanfarrão, Tharcísyo Duarte (Argorento), Pierre Niau (Lambioia), William Costa (Lady Will), Nathan Lima (Madrás), Nyladih Theódori (Russo), Jefferson Soares (Josefferson), Guilherme Monteiro (Gado Nalore), Cristovão Porciano (Fanfarrão), Gesiel Neto (Nash), Paulo Henrique (Bixa Vaga-Lume), Bruno Lustosa (Butica), Tibério Magno (Fina), Amoringa (Asxmora), Tibério, Francys (Padawan) e Fabrizio (Pé na Cova).
- Aos funcionários do PPGF-UFRN, em especial a Silvestre e a ex-funcionária Celina Pinheiro.
- Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro .

There is no branch of mathematics, however abstract, which may not someday be applied to  
phenomena of the real world.

**Nikolai Ivanovich Lobachevsky**

## RESUMO

Um problema relevante na Física Estatística e na Física Matemática consiste em derivar expressões numericamente precisas e formas analíticas exatas para calcular as distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis  $P_\alpha(x; \beta)$ . Na prática, estas distribuições são usualmente expressas em termos da integral de Fourier de sua função característica. De fato, expressões na forma fechada são relativamente escassas, dado o enorme espaço de parâmetros:  $0 < \alpha \leq 2$  (índice Lévy),  $-1 \leq \beta \leq 1$  (assimetria),  $\sigma > 0$  (escala) e  $-\infty < \mu < \infty$  (deslocamento). No âmbito formal, importantes resultados exatos dependem de funções especiais, tais como as funções Meijer-G, Fox-H e somas finitas de funções hipergeométricas, com apenas alguns casos excepcionais expressos em termos de funções elementares (distribuições gaussiana e de Cauchy). De um ponto de vista mais prático, métodos como expansões em séries, por exemplo, permitem uma estimativa das distribuições de Lévy com alta precisão numérica, porém a maioria das abordagens estão restritas a um pequeno subconjunto dos parâmetros, além de fazerem o uso de algoritmos sofisticados relativamente demorados. Como contribuição adicional a este problema, propomos novos métodos para descrever as distribuições estáveis simétricas, com parâmetros  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ . Obtemos uma descrição através de uma forma fechada analítica, via séries de potência formais fazendo uso do procedimento da soma de regularização de Borel (para  $\alpha = 2/M$ ,  $M = 1, 2, 3, \dots$ ). Também obtemos uma expressão aproximada (para  $0 < \alpha \leq 2$ ) que foi desenvolvida por meio da divisão do domínio da variável de integração em subintervalos (janelas), construindo a expansão em séries adequada dentro de cada uma delas, em seguida, calculando as integrais termo a termo.

**Palavras-chave:** Distribuições Estáveis, Teorema do Limite Central, Séries Hipergeométricas, Séries Divergentes, Regularização, Somabilidade, Aproximação em Séries.

# ABSTRACT

A relevant problem in Statistical Physics and Mathematical Physics is to derive numerically precise expressions and exact analytical forms to calculate the distributions of Lévy  $\alpha$ -stable  $P_\alpha(x; \beta)$ . In practice, these distributions are usually expressed in terms of the Fourier Integral of its characteristic function. In fact, known closed-form expressions are relatively scarce given the huge space of parameters:  $0 < \alpha \leq 2$  (Lévy index),  $-1 \leq \beta \leq 1$  (asymmetry),  $\sigma > 0$  (scale) and  $-\infty < \mu < \infty$  (offset). In the formal context, important exact results rely on special functions, such as the Meijer-G, Fox-H functions and finite sum of hypergeometric functions, with only a few exceptional cases expressed in terms of elementary functions (Gaussian and Cauchy distributions). From a more practical point of view, methods such as, e.g., series expansions allow an estimation of the Lévy distributions with high numerical precision, but most of the approaches are restricted to a small subset of the parameters and, although sophisticated, these algorithms are time-consuming. As an additional contribution to this problem, we propose new methods to describe the symmetric stable distributions, with parameters  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ . We obtain a description through a closed analytical form, via formal power series making use of the Borel regularization sum procedure (for  $\alpha = 2/M$ ,  $M = 1, 2, 3, \dots$ ). Furthermore we obtain an approximate expression (for  $0 < \alpha \leq 2$ ) by dividing the domain of the integration variable into sub-intervals (windows), performing proper series expansion inside each window, and then calculating the integrals term by term.

**Keywords:** Stable Distributions, Central Theorem Limit, Hypergeometric Series, Divergent Series, Regularization, Summability, Approach in Series.



# Lista de Figuras

2.1	Simulação através do método de Monte Carlo que calcula a média amostral de uma população que segue uma distribuição exponencial. É notável o fato de a medida que se aumenta o tamanho da amostra a forma da distribuição tende à normal. [57]. . . . .	11
2.2	Altura de uma população de pessoas seguindo uma distribuição normal [58].	12
2.3	Representação do conjunto de distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias iid com segundo momento finito e infinito. Note que a Gaussiana possui uma lei estável e funciona como um atrator para todas as distribuições com momento finito. Todas as outras leis estáveis são atratores para o caso em que o segundo momento for infinito. . . . .	17
2.4	Exemplo de distribuições estáveis para alguns valores dos parâmetro $\alpha$ , $\beta$ , $\mu$ e $\sigma$ . . . . .	23
2.5	Distribuições estáveis cujas formas fechadas são conhecidas: a distribuição de Cauchy ( $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ , linha pontilhada vermelha), distribuição normal ( $\alpha = 2$ , linha sólida preta). . . . .	25
2.6	Gráfico semi-log das distribuições de Lévy $\alpha$ -estável simétrica para $\alpha = 2$ (linha sólida preta), $\alpha = 1,8$ (linha pontilhada vermelha), $\alpha = 1,5$ (linha tracejada azul) and $\alpha = 1$ (linha de traço longo verde). A cauda para $\alpha = 2$ (normal) decai mais rapidamente (decaimento exponencial) que as outras distribuições que possuem uma cauda-pesada (decaimento de lei de potência) [64]. . . . .	28
3.1	Gráfico da função Gama, $\Gamma(x)$ , que representa uma generalização do fatorial e é uma das funções especiais mais importantes. . . . .	37
4.1	Representação do caminho $I$ no plano complexo. Os zeros da função $\Gamma(\mathbf{a} + S)$ ficam à esquerda de $I$ , e os zeros da função $\Gamma(-S)$ ficam à direita. . . .	59

5.1	A distribuição de Lévy $P_M(x)$ obtida através de cálculos numéricos na integral da Eq. (5.1) (símbolos) e o resultado analítico da Eq. (5.16) (curva contínua), para seis valores de $M$ e $x \geq 0$ (lembrando que $P_M(x)$ é uma função simétrica de $x$ para o caso de $\beta = 0$ ). A concordância é excelente para qualquer valor de $x$ no intervalo. . . . .	66
5.2	A distribuição de Lévy $P_M(x)$ obtida a partir de cálculos numéricos conjuntamente com o resultado analítico para $M = 3, 4, 5$ e $6$ , para $x \in (-1, 1)$ . Note que as distribuições são simétricas, como esperado para $\beta = 0$ . Esta simetria está associada ao argumento da função hipergeométrica que possui paridade par e ao fator $x^2$ que multiplica esta última. . . . .	67
6.1	Nós dividimos a integral de Fourier, Eq. (5.1), em janelas não sobrepostas por partes na integração. As linhas tracejadas indicam as bordas das janelas.	70
6.2	Gráfico de $S_K(x; \alpha)$ , equação 6.5, para $K = 5$ (curvas contínuas) e sua transformada de Fourier $g_\alpha(x)$ calculada na primeira janela (símbolos) para vários valores de $\alpha$ . O erro absoluto é menor que $10^{-8}$ . . . . .	74
6.3	Gráficos do integrando da equação 5.1 e sua correspondente expansão até a quinta ordem ( $M = 5$ ) na segunda janela da variável de integração $t$ , para alguns valores de $\alpha$ e $x$ . Em todos estes casos o erro absoluto nunca é maior que $10^{-3}$ . A terceira, quarta, etc., janelas mostram um comportamento similar. . . . .	75
6.4	Comparação para vários valores de $\alpha \in [0, 4; 1, 9]$ do cálculo numérico da equação (5.1) (símbolos) e a aproximação em série (truncada) dada pela equação (6.22) (curvas contínuas), onde $K = N = 4$ e $M = 5$ . Resultados similares podem ser obtidos para outros $\alpha$ 's (gráficos não mostrados). Para $\alpha = 0, 1$ , o gráfico mostrado é para $N = 10^5$ . O erro absoluto é menor que $10^{-3}$ . . . . .	78
6.5	O mesmo procedimento mostrado na figura 6.4 porém com $N = 50$ para $\alpha \in [0, 4; 1, 9]$ . Para $\alpha = 0, 1$ , foi considerado $N = 2 \times 10^5$ . O erro absoluto é menor que $10^{-5}$ . . . . .	79

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Conteúdo</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Distribuições Estáveis</b>	<b>7</b>
2.1 O Teorema do Limite Central . . . . .	7
2.2 Distribuições infinitamente divisíveis . . . . .	13
2.3 Distribuições estáveis . . . . .	15
2.4 Distribuição de Lévy $\alpha$ -estável simétrica . . . . .	24
<b>3 Funções Hipergeométricas</b>	<b>29</b>
3.1 Função hipergeométrica de Gauss . . . . .	29
3.1.1 Equação Hipergeométrica . . . . .	29
3.1.2 Função hipergeométrica . . . . .	32
3.1.3 Representação Integral . . . . .	39
3.2 Função Hipergeométrica Generalizada . . . . .	42
3.2.1 Convergência da série ${}_pF_q$ . . . . .	43
3.2.2 Derivada e Representação Integral . . . . .	45
3.2.3 Relação com outras funções . . . . .	46
<b>4 Somas de Regularização</b>	<b>48</b>
4.1 Séries divergentes . . . . .	48
4.2 Série de potência formal e Regularização . . . . .	51

4.2.1	K-Somabilidade . . . . .	53
4.3	Soma de Borel para a função hipergeométrica generalizada . . . . .	55
4.3.1	Soma de Borel . . . . .	55
4.3.2	Regularização de ${}_qF_{p-1}$ . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Distribuição de Lévy <math>\alpha</math>-estável simétrica para <math>\alpha = \frac{2}{M}</math></b>	<b>60</b>
5.1	Considerações iniciais . . . . .	60
5.2	Fórmula para distribuição de Lévy estável simétrica com $\alpha = \frac{2}{M}$ ( $M$ inteiro)	61
<b>6</b>	<b>Aproximação para as distribuições estáveis simétricas</b>	<b>68</b>
6.1	Conceitos preliminares . . . . .	68
6.2	Aproximação em séries para distribuição de Lévy $\alpha$ -estável simétrica . . . .	69
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>80</b>
7.1	Comentários Finais . . . . .	80
7.2	Perspectivas . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Publicações</b>	<b>83</b>

# Introdução

*“A História está repleta de pessoas que, como resultado do medo, ou por ignorância, ou por cobiça de poder, destruíram conhecimentos de imensurável valor que em verdade pertenciam a todos nós. Nós não devemos deixar isso acontecer de novo.”*

---

Carl Sagan

Os métodos estatísticos cada vez mais se tornam uma ferramenta imprescindível para praticamente todos os pesquisadores, engenheiros, médicos, empresários e muitos outros. Áreas como a Física Estatística, Biologia, Mecânica Quântica, assim como comportamento populacional, bolsa de valores, possuem no seu âmago uma descrição estatística [1–13]. Dentro desse universo de teoremas, há um em especial de grande importância para a simplificação do estudo das distribuições, o Teorema do Limite Central (TLC) [14]. Este teorema garante que a soma infinita de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, ou seja, que possuem a mesma distribuição de probabilidade, e com variância finita, converjam para uma distribuição Gaussiana.

Há mais de 80 anos, Paul Lévy deduziu uma generalização do teorema do limite central para o caso de variáveis aleatórias com uma divergência no segundo momento central (i.e., variância infinita). Lévy construiu uma expressão geral para as distribuições estáveis e mostrou que o TLC é um caso especial do conjunto das distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis  $P_{\alpha,\beta}(x)$  que podem ser expressas como a transformada de Fourier de sua função

característica,  $f(t) = e^{\phi(t)}$ , onde

$$\phi(t) = i\mu t - \sigma|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right\}, \quad (1.1)$$

para  $0 < \alpha < 1$  e  $1 < \alpha \leq 2$ . Para  $\alpha = 1$ , a forma da função é dada por

$$\phi(t) = i\mu t - \sigma|t| \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln|t| \right\}, \quad (1.2)$$

de modo que,

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt. \quad (1.3)$$

O parâmetro  $\alpha \in (0, 2]$  é denominado de índice de Lévy,  $-1 \leq \beta \leq 1$  é a assimetria,  $\mu$  é um número real chamado de parâmetro de deslocamento e  $\sigma \geq 0$  é o parâmetro de escala [14].

Há uma grande diversidade de processos estocásticos que podem ser descritos [8, 9, 15–19] na forma da equação (1.3), de modo que há uma grande motivação para o estudo das possíveis configurações da integral, devido ao fato de que a mesma não possui uma forma analítica fechada para a maioria dos valores possíveis dos parâmetros. Um exemplo da importância destas distribuições é a publicação de um artigo, por Holtsmark [20] no ano de 1919 (anterior ao trabalho de Lévy), onde este encontra uma função de distribuição de probabilidade para as flutuações do campo gravitacional de estrelas sob certas condições da distribuição de massa, dada por

$$\int_{R^3} \exp i(t, x) p(x) dx = \exp(-\lambda|t|^{3/2}) \quad t \in R^3, \quad (1.4)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva que depende de propriedades física. Hoje sabe-se que esta distribuição pertence à classe das distribuições estáveis simétricas com parâmetro  $\alpha = 3/2$ . Há três resultados clássicos com uma expressão fechada, que são os casos simétricos com  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$  correspondendo às distribuições de Cauchy e Gauss [21], respectivamente, e o caso assimétrico com  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1$  que corresponde a distribuição de Lévy-Smirnov [11]. Existem na literatura vários trabalhos [22–24], com diferentes métodos para solucionar esta integral para um certo conjunto de valores dos parâmetros. Apesar disto, a quantidade de formas fechadas em termos de funções elementares para as

distribuições estáveis é escassa frente ao espaço  $\alpha - \beta$ .

Há alguns trabalhos que usam expansões em séries para descrever as distribuições estáveis para certos conjuntos de parâmetros e em especial o caso simétrico  $\beta = 0$  [25–27]. Um grande exemplo deste caso foi produzido por Bergström [28], na década de 1950, onde este desenvolve duas expansões distintas para diferentes regiões de  $\alpha$ .

- Para  $0 < \alpha < 1$ :

$$G'_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{x|x|^{\alpha k}} \sin k \left( \frac{\alpha\pi}{2} + \beta - \alpha \arg x \right). \quad (1.5)$$

- Para  $\alpha > 1$ :

$$G'_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha k + 1}{\alpha}\right)}{k! \alpha} x^k \cos \left[ k \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{\beta}{\alpha} \right]. \quad (1.6)$$

Para  $x < 0$ ,  $\arg x = \pi$ . Ambas expressões são séries infinitas que truncadas se tornam expansões assintóticas. A primeira para  $1 \leq \alpha < 2$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  e a segunda para  $0 < \alpha < 2$ ,  $|x| \rightarrow 0$ . Outro tipo de solução encontrada na literatura consiste em representações envolvendo as funções Meijer-G e Fox-H [29–33]. O uso de uma soma finita de funções hipergeométricas pode ser encontrado nos trabalhos de K. A. Penson et al. [34, 35]. Estes pesquisadores encontraram uma forma exata  $g(\alpha, \beta, x)$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  racionais (ver a referência [35]), usando a transformação inversa de Mellin, a fórmula da reflexão de Euler e a multiplicação de Gauss-Legendre, com diferentes representações envolvendo a trinca de números  $(l, k, r)$ :

- Para  $\alpha = l/k < 1$ ,  $\beta = \alpha - 2r/k = -\alpha$ , que se obtém  $r = l$ , tem-se  $g(l/k, -l/k, x)$  com  $x \geq 0$ . Se  $\beta = \alpha - 2r/k = \alpha$ , que se obtém  $r = 0$ , encontra-se  $g(l/k, l/k, x)$  somente para  $x \leq 0$ .
- Para  $\alpha = l/k$  e a condição  $1 < l/k \leq 2$  e  $|\beta| = |(l - 2r)/k| \leq 2 - l/k$ , há duas funções  $g(l/k, (l - 2r)/k, x)$ , e  $g(l/k, (2r - l)/k, x)$  definidas em todo intervalo real.
- Para  $\alpha = l/k < 1$  e  $|\beta| = |(l - 2r)/k| < \alpha$  a função é descrita através da decomposição das funções acima, de modo que, a expressão é dada por  $g(l/k, (l - 2r)/k, x)\theta(-x) + g(l/k, (2r - l)/k, x)\theta(x)$ , onde  $\theta(x)$  é a função de Heaviside.

Na primeira parte deste trabalho nós construímos um método para obtenção de formas analíticas fechadas, via série de potência formal [36] e da regularização de somas de Borel-Laplace [37–39], para as distribuições estáveis simétricas com  $\alpha = 2/M$ ,

$$P_M(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \exp[-t^{2/M}] \cos[tx]. \quad (1.7)$$

O primeiro passo consistiu em procurar descrever estas distribuições por meio de funções hipergeométricas, visto que estas últimas são praticamente onipresentes na representação de uma imensa quantidade de outras funções e diversas aplicações [40], além de trabalhos que associam ambas [23, 34, 35, 41]. Apesar de termos atingindo o nosso objetivo, a solução obtida consistia de séries divergentes exceto para os casos triviais das distribuições de Cauchy e Normal. Por outro lado, isto mostra a dificuldade por trás destas distribuições, e nossa expressão para os casos sem solução não possuía aplicação prática, principalmente em cálculos numéricos. Para contornar este impasse, foi necessário olhar o nosso resultado, não somente como uma série de potência usual (análise real), mas como uma série de potência formal.

A teoria geral das séries de potência formais é objeto de estudo da matemática há, relativamente, bastante tempo. Leonhard Euler (1707-1783) se preocupou por bastante tempo sobre as implicações e a importância das séries divergentes [42]. Toda a teoria está bem definida através de uma rigorosa estrutura de anel (com as operações de adição, subtração e multiplicação bem definidas, mas não há divisão): o anel (comutativo) das séries de potência em  $x$ , com coeficientes em um corpo  $\mathbb{F}$  cujos elementos são dados por  $f_x = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ .

Isto permite que os objetos  $f_x$  possuam uma construção *genuína* independentemente das séries correspondentes não possuírem um limite bem definido (ou mesmo quando o limite não existir [43]). De fato, do ponto de vista puramente matemático, estas séries podem ser interessantes e úteis. Por exemplo,  $\sum_{n=1}^\infty n! x^n$  converge somente em  $x = 0$  e em nenhum lugar mais. Mas se forem interpretados como uma sequência de coeficientes, os números  $n!$  são bem comportados. Então, uma abordagem para os estudo das séries formais é tratá-las como objetos abstratos, por exemplo, como geradoras de funções [44]. Vale ressaltar que embora as séries formais não sejam objeto de estudo comum na Física, estes métodos tem achado aplicações em áreas como física estatística [45–48], teoria quântica



de campos [49, 50], e difração ótica [51].

Para os propósitos do presente trabalho, um aspecto relevante é que a solução formal  $f = f_x$  da equação diferencial  $\mathcal{D}_x[f] = 0$ , em princípio, sempre pode ser regularizada através de vários métodos de soma-regularização, dado que  $\mathcal{D}_x$  e o espaço em que  $f$  está definido satisfaça certas condições. Este é exatamente o caso para as funções hipergeométricas não-convergentes [52].

Como segundo resultado, na tentativa de estender os valores de  $\alpha$  além do obtido no primeiro caso, obtemos uma aproximação em série, eficiente, para  $0 < \alpha \leq 2$ . Nesta segunda abordagem optamos por expandir no lugar do cosseno a exponencial do integrando da distribuição de Lévy.

Expandindo em séries de Taylor a exponencial, o primeiro problema que se apresenta é que o erro cresce a medida que nos afastamos do centro da expansão. Para contornar este problema, nos utilizamos da simetria do cosseno e dividimos o domínio de integração da transformada de Fourier em subintervalos que denominamos de janelas. São construídas aproximações em cada janela para no fim, quando somarmos, obtermos uma aproximação para as distribuições estáveis simétricas.

As janelas foram definidas como  $(0, (\pi/2)/x)$  (primeira janela) e as próximas como,  $\mathcal{I}_n = ((\pi/2)(4n - 3)/x, (\pi/2)(4n + 1)/x)$  (para  $n = 1, 2, \dots$ ). Para primeira janela foi realizada uma expansão, semelhante ao que foi realizado no resultado analítico, e descrevemos esta em termos de uma série da função gama incompleta. Para as subseqüentes foi realizada a expansão da exponencial no ponto  $t_n = (\pi/2)(4n - 1)/x$ . O cosseno apresenta uma simetria para estas janelas que reduz a quantidade de termos necessários para a aproximação. Por fim, somamos todas as contribuições de modo a descrever, aproximadamente, a distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica para  $0 < \alpha \leq 2$ .

Esta tese está definida da seguinte forma: No capítulo 2 nós iniciamos com o estudo do teorema do limite central e suas limitações. Em seguida é feita uma breve revisão das distribuições infinitamente divisíveis e estáveis assim como sua conexão com a generalização do teorema do limite central. Foi abordado o teorema atribuído a Paul Lévy em que se constrói uma expressão geral para estas distribuições em termos de uma integral de Fourier da função característica. No capítulo 3 é abordada a teoria das funções hipergeométricas e devido ao fato desta ser solução de uma equação diferencial de segunda ordem com 3 pontos singulares escrita em sua forma mais geral, isto justifica formalmente

sua conexão com as outras funções. São exploradas diferentes representações assim como as de Euler e Barnes. No final deste capítulo é mostrada sua relação com algumas funções elementares e especiais essenciais para a Física. No capítulo 4 é feita uma introdução às somas de regularização e sua importância para o estudo das séries divergentes. Aqui serão abordadas as séries formais e dentro desse conjunto amplo as séries de Gevrey que pela análise de expansões assintóticas é a pedra fundamental para a regularização de Borel. Para finalizar é mostrado um teorema que regulariza as funções hipergeométricas por meio da transformada de Borel e cuja soma é obtida via transformada de Laplace.

Como primeiro resultado, descrito no capítulo 5, nós obtemos uma prova de que um conjunto infinito das integrais da equação 1.7 podem ser escritas em termos de  ${}_{M-1}F_0$ . Exceto para os casos Gaussiano e de Cauchy, respectivamente  $M = 1$  e  $M = 2$ , as séries correspondentes possuem o raio de convergência zero. Apesar disto, para  $M = 2, 3, 4, \dots$ , nós podemos aplicar o resultado rigoroso da referência [53] e converter nossa solução em uma soma finita de funções hipergeométricas generalizadas  ${}_1F_{M-2}$  que converge em todo lugar. Então, nós finalizamos com uma comparação entre a expressão analítica fechada para  $P_M(x)$  e cálculos numéricos explícitos. No capítulo 6 descrevemos nosso segundo resultado que consiste em um método para construção de uma série aproximativa para  $0 < \alpha \leq 2$  que consistiu na divisão do domínio de integração em janelas. Mostramos o que esperar da aproximação de cada região e por fim é feita uma comparação com o cálculo numérico da distribuição estável simétrica.

No capítulo 7 são realizadas as considerações finais e as perspectivas de novas abordagens para obtenções de novas formas fechadas para as distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis. Por fim no capítulo 8 é mostrado o fruto deste trabalho na forma da publicação de dois artigos.

# Capítulo 2

## Distribuições Estáveis

*“Simplicity is the ultimate sophistication.”*

---

Leonardo da Vinci

### 2.1 O Teorema do Limite Central

Dentro da teoria da probabilidade há um conjunto de teoremas de extrema importância na generalização das ideias associadas ao estudo de grandes populações. Por exemplo, um conjunto de medidas que envolvem aferições em populações de bactérias, partículas de um sistema termodinâmico ou mesmo dados obtidos dentro da sociedade. O teorema do limite central, assim como a lei dos grandes números, produz resultados que, ao mesmo tempo que facilitam, nos mostram padrões dentro de processos estocásticos.

Matematicamente falando, o teorema do limite central surge quando nós temos um conjunto de variáveis aleatórias independentes com variância finita e identicamente distribuídas, e queremos saber qual a distribuição associada à combinação destas últimas. Muitos matemáticos se debruçaram sobre este tipo de problema, além de haver várias demonstrações e formas de considerá-lo. Dois matemáticos franceses levam o crédito como os primeiros a apresentarem este teorema. O primeiro deles foi Abraham de Moivre (1667-1754), que simplesmente postula este teorema, e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) que em 1812 publicou o livro *Théorie analytique des probabilités* [14]. Laplace foi o primeiro a dar um tratamento mais formal à teoria da probabilidade e deu um grande avanço no

problema da soma de variáveis aleatórias [14]. Mesmo isso sendo feito no século XVII, uma definição mais geral e uma demonstração matemática deste teorema foi dada em 1901 pelo matemático russo Aleksander Lyapunov (1857-1918) [14, 54, 55]. Abaixo é dada uma demonstração do Teorema do limite central para o caso mais conhecido [56], que é quando as variáveis aleatórias possuem a mesma média  $\mu$  e a mesma variância  $\sigma^2$  (onde a variância é finita).

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes ou com correlação de curto alcance e identicamente distribuídas, cada uma com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Então, a distribuição da variável aleatória definida como a soma normalizada*

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (2.1)$$

*tende à distribuição normal padrão quando  $n \rightarrow \infty$ .*

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Nosso objetivo é encontrar a distribuição que descreve  $Z_n$ . Reescrevemos

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum W_i, \quad (2.3)$$

onde  $W_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ .

Calculando a função característica de  $Z_n$ , e levando em conta o fato que se as variáveis  $X_i$  são independentes,  $W_i$  também o são, temos

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(v) &= E \left[ \exp \left( iv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n W_j \right) \right], \\ M_{Z_n}(v) &= \prod_{j=1}^n E \left[ \exp \left( i \frac{v}{\sqrt{n}} W_j \right) \right], \\ M_{Z_n}(v) &= \left( E \left[ \exp \left( i \frac{v}{\sqrt{n}} W_j \right) \right] \right)^n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $E[x]$  representa o valor esperado de  $x$ .

Expandido a exponencial em séries de Taylor, temos que

$$\exp\left(i\frac{v}{\sqrt{n}}W_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{v}{\sqrt{n}}W_j\right)^k}{k!}, \quad (2.5)$$

de modo que podemos escrever

$$E\left[\exp\left(i\frac{v}{\sqrt{n}}W_j\right)\right] = 1 + \frac{iv}{\sqrt{n}}\mu_{W_j} - \frac{v^2}{2n}\sigma_{W_j}^2 - \frac{iv^3}{6n^{3/2}}E[W_i^3] + \dots, \quad (2.6)$$

e chamando de  $R_n$  os termos da séries a partir da terceira ordem,

$$E\left[\exp\left(i\frac{v}{\sqrt{n}}W_j\right)\right] = 1 + \frac{iv}{\sqrt{n}}\mu_{W_j} - \frac{v^2}{2n}\sigma_{W_j}^2 + R_n, \quad (2.7)$$

voltando para equação 2.4, podemos aplicar o logaritmo e obter

$$\begin{aligned} \ln(M_{Z_n}(v)) &= n \ln\left(E\left[\exp\left(i\frac{v}{\sqrt{n}}W_j\right)\right]\right), \\ \ln(M_{Z_n}(v)) &= n \ln\left(1 + \frac{iv}{\sqrt{n}}\mu_{W_j} - \frac{v^2}{2n}\sigma_{W_j}^2 + R_n\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

é fácil ver que  $\mu_{W_j} = 0$  e  $\sigma_{W_j}^2 = 1$ , de modo que

$$\ln(M_{Z_n}(v)) = n \ln\left(1 - \frac{v^2}{2n} + R_n\right). \quad (2.9)$$

Sabendo que a série para

$$\ln(1 - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}, \quad (2.10)$$

e escrevendo  $x = \frac{v^2}{2n} - R_n$ , a equação 2.9 fica na seguinte forma

$$\ln(M_{Z_n}(v)) = -\frac{v^2}{2} + nR_n - \frac{\left(\frac{v^2}{2} - \frac{R_n}{n}\right)^2}{2n} - \frac{\left(\frac{v^2}{2} - \frac{R_n}{n}\right)^3}{3n^2}. \quad (2.11)$$

Finalmente, levando em conta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ , podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(M_{Z_n}(v)) = -\frac{v^2}{2}, \quad (2.12)$$

ou seja,

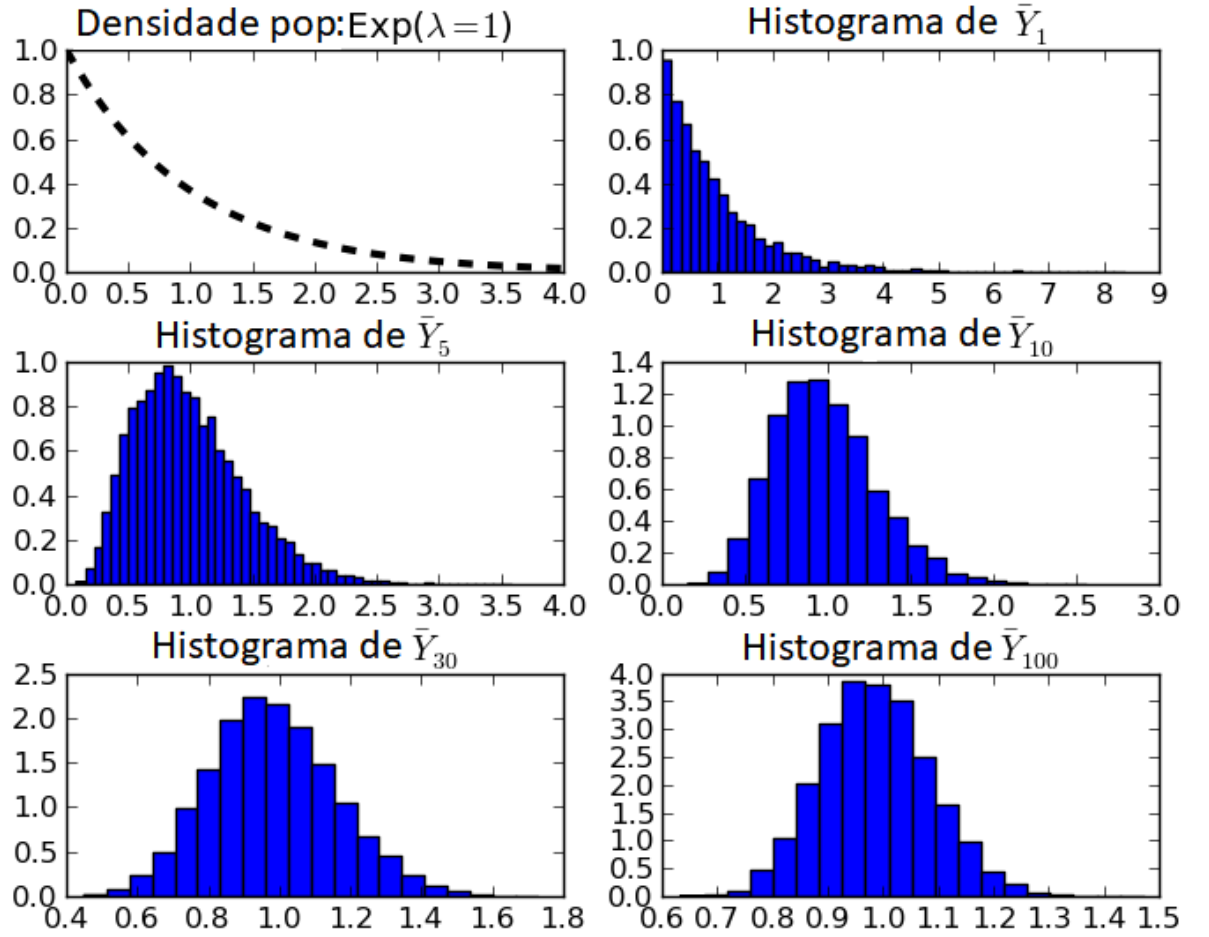
$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad (2.13)$$

que é a função característica associada a distribuição normal cuja média e variância são respectivamente,  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , ou seja,

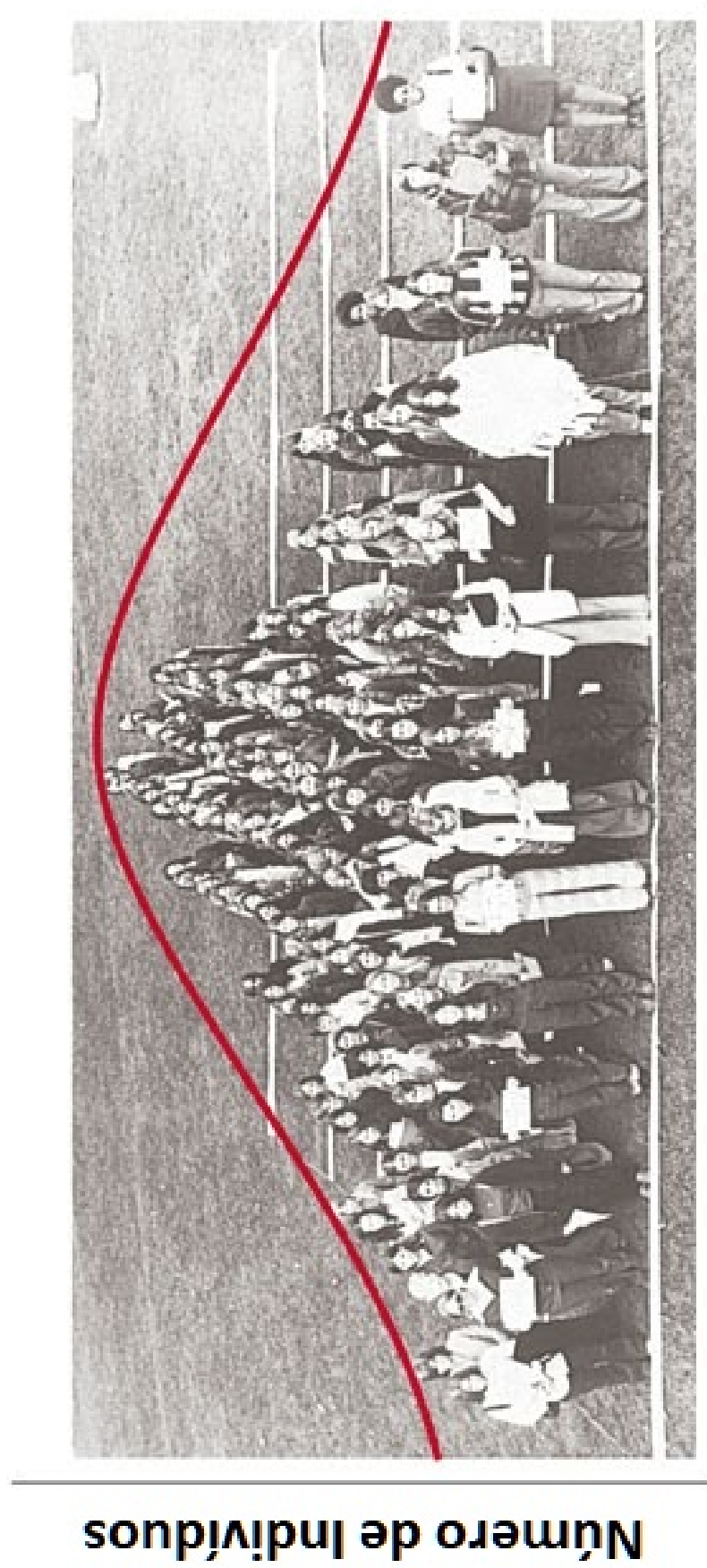
$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}. \quad (2.14)$$

□

A figura 2.1 mostra o exemplo de uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade é do tipo exponencial. A medida que se aumenta a quantidade de amostras a curva se aproxima de uma gaussiana. Este comportamento mostra a importância deste teorema para diversas áreas da ciência. Na figura 2.2 é possível ver o agrupamento de pessoas a partir da altura e fica evidente o formato de sino tão característico da distribuição normal.



**Figura 2.1:** Simulação através do método de Monte Carlo que calcula a média amostral de uma população que segue uma distribuição exponencial. É notável o fato de a medida que se aumenta o tamanho da amostra a forma da distribuição tende à normal. [57].



**Figura 2.2:** Altura de uma população de pessoas seguindo uma distribuição normal [58].



## 2.2 Distribuições infinitamente divisíveis

Como foi visto na seção anterior, a distribuição normal possui o papel de atrator para os processos estocásticos cuja variância seja finita, ou seja, qualquer que seja a distribuição de probabilidade a que uma variável aleatória responda, à medida que se aumenta o número de cópias desta, o comportamento convergirá para a gaussiana. Considere como primeiro contra-exemplo a distribuição de Cauchy que é dada por,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{q}{q^2 + x^2} \quad q > 0 \quad (2.15)$$

o segundo momento é dado por,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qx^2}{q^2 + x^2} dx \\ &= \frac{q}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{q^2 + x^2} dx \right) = \frac{q}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx - \sqrt{q} \frac{\pi}{2} \right) \implies \infty. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como é possível observar, o segundo momento da distribuição de Cauchy é infinito, e quando o teorema do limite central foi provado, usou-se a condição de que a variância fosse finita. Na verdade a distribuição acima tem um comportamento bem distinto da gaussiana, nem a média é definida. Para analisar o que acontece com a combinação de variáveis aleatórias com uma distribuição de Cauchy, consideremos a sua função característica,  $\phi(t) = e^{-q|t|}$ , é fácil verificar por meio da transformada de Fourier que,

$$\frac{1}{\pi} \frac{q}{q^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q|t|} e^{-ixt} dt. \quad (2.17)$$

Se construirmos uma variável aleatória que consiste na soma de  $n$  variáveis aleatórias e independentes com distribuição de Cauchy, esta última terá como função característica,  $\phi(t) = [e^{-q|t|}]^n = e^{-nq|t|}$ , ou seja,

$$f(x) = \frac{nq}{n^2 q^2 + x^2}. \quad (2.18)$$

Por mais que aumentemos o número de variáveis, esta nunca tenderá à uma distribuição normal, de modo que o teorema do limite central deixa de ser válido para distribuições

desse tipo. A pergunta que surge é: existe algum outro tipo de função que funcione de forma semelhante à gaussiana para situação onde a variância não exista? Um dos grandes nomes que puderam responder esta questão foi Paul Lévy (1886-1971) que derivou, em 1934, uma expressão que generaliza o limite central via distribuições infinitamente divisíveis e, por fim, as leis estáveis [14, 54, 59].

**Definição 2.2.1.**  $\mathcal{L}$  é dita ser uma distribuição infinitamente divisível se para cada  $n$  esta pode ser representada como uma distribuição da soma  $S_n = X_{1,n} + X_{2,n} + \dots + X_{n,n}$  de  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma distribuição comum  $\mathcal{L}_n$ .

**Proposição 2.2.1.** Seja  $X$  uma variável aleatória cuja função de distribuição é  $\mathcal{L}(X)$  e a função característica é  $\phi$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $X$  tem distribuição infinitamente divisível.
2. Para todo  $n \geq 1$  existem variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  independentes e identicamente distribuídas tais que  $X$  possui a mesma lei de distribuição que  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .
3. Para todo  $n \geq 1$  existe uma função característica  $\phi_n$  tal que  $\phi = (\phi_n)^n$ .

Alguns exemplos são:

- Distribuição gaussiana:  $\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$  e  $\phi_n(t) = e^{i\frac{\mu}{n}t - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$
- Distribuição Gama:  $\phi(t) = e^{ix_0 t} (1 - i\beta t)^{-\alpha}$  e  $\phi_n(t) = e^{i\frac{x_0}{n}t} (1 - i\beta t)^{-\frac{\alpha}{n}}$
- Distribuição de Poisson:  $\phi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$  e  $\phi_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)}$
- Distribuição de Cauchy:  $\phi(t) = e^{ix_0 t - q|t|}$  e  $\phi_n(t) = e^{i\frac{x_0}{n}t - \frac{q}{n}|t|}$

As distribuições que pertencem a esta classe se mostraram de grande importância devido ao fato de que quando a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) tendem à uma variável com lei de distribuição  $\mathcal{L}(X)$ , esta é infinitamente divisível. Esta propriedade tem implicação direta na Lei dos grandes números [11, 60].

## 2.3 Distribuições estáveis

Consideremos a partir de agora as variáveis aleatórias,  $X_1, X_2, \dots$  e  $X_n$ , e a seguinte soma,

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{A_n} - B_n. \quad (2.19)$$

Note que para o caso em que  $\sigma^2 < \infty$ , então  $A_n \sim \sqrt{n}$  e  $X$  deve ser normal. A generalização para o teorema do limite central surge quando nos perguntamos quais as possíveis condições e a forma que  $X$  deve ter, para que  $S_n$ , no limite, possua a distribuição de  $X$ . Se esta soma for escrita como,

$$S_n = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}, \quad (2.20)$$

onde

$$X_k^{(n)} = \frac{X_k}{A_n} - \frac{B_n}{n}, \quad (2.21)$$

e  $S_n \rightarrow X$ , então  $X$  obedecerá à uma lei de distribuição infinitamente divisível. Porém, a forma como as variáveis estão postas restringe os tipos possíveis de leis a serem seguidas, de modo que se tornam mais restritos os possíveis tipos de distribuição. Este seleto grupo de distribuições obedecem a uma lei dita Estável e pode ser definida da seguinte forma [54]:

**Definição 2.3.1.** *Uma variável aleatória  $X$  é dita ter uma distribuição estável se para todo  $k > 0$ , e  $X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}$  independentes com a mesma distribuição de  $X$ , existem constantes  $a_k > 0$ ,  $b_k$  tais que*

$$\mathcal{L}(X_1^{(n)} + \dots + X_k^{(n)}) = \mathcal{L}(a_k X + b_k). \quad (2.22)$$

**Proposição 2.3.1.**  *$X$  é o limite da distribuição da soma normalizada  $S_n$  (2.20) se, e somente se,  $X$  possuir uma distribuição estável [54].*

Seguindo a proposição acima, Lévy [61, 62] e Khintchine [63] demonstraram uma forma geral (ver os teoremas a seguir) para as distribuições estáveis através de sua função característica. Com isso, o teorema do limite central demonstrado anteriormente (2.1.1), nada mais é que um caso particular, onde a gaussiana é um caso específico dentro do universo das distribuições estáveis, que por sua vez estão contidas no conjunto das infinitamente divisíveis (2.3). De modo que podemos descrever o teorema do limite central generalizado

da seguinte forma:

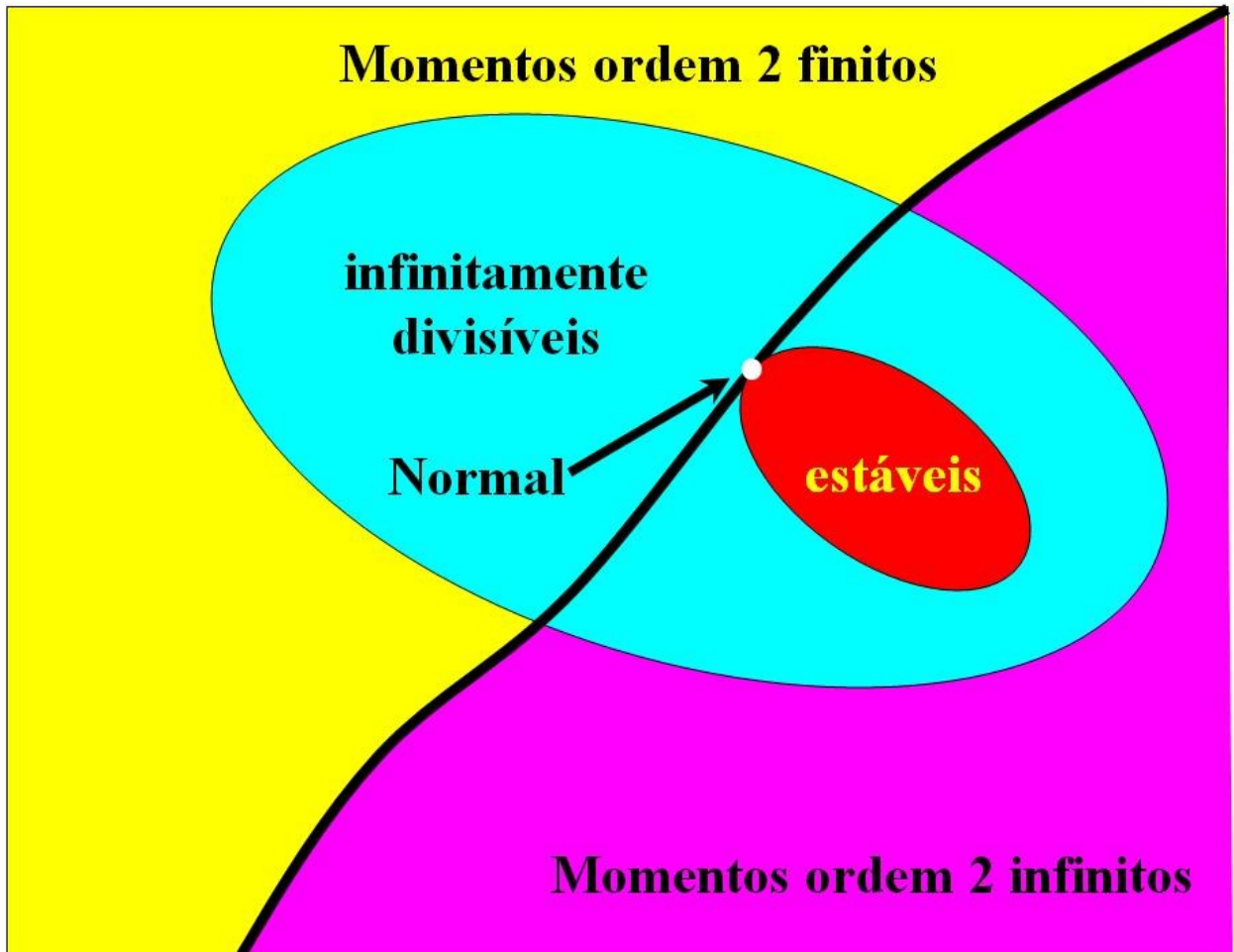
1. A soma de  $n$  cópias de variáveis aleatórias iid cuja variância é finita tende a distribuição normal.
2. A soma de  $n$  cópias de variáveis aleatórias iid cuja variância é infinita tende a uma distribuição estável (diferente da normal).

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $X$  uma variável aleatória que obedece uma lei estável. Sua função característica  $f(t)$  é dada através da seguinte expressão:*

$$\begin{aligned} \ln f(t) = i\mu t + c_1 \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} \\ + c_2 \int_0^{\infty} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{du}{u^{1+\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

denominada de representação integral canônica, com parâmetros  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ ,  $0 < \alpha \leq 2$  e  $\beta$ .

O leitor pode encontrar uma demonstração para este teorema em [54, 59, 61]. Note que para encontrar a expressão para função de distribuição de probabilidade de uma lei estável se faz necessário calcular a transformada de Fourier de 2.23, o que em primeira análise nos mostra a dificuldade de se obter uma expressão que facilite o uso da mesma. Há um outro teorema, que será demonstrado a seguir, que constrói uma forma fechada para esta representação canônica [59].



**Figura 2.3:** Representação do conjunto de distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias iid com segundo momento finito e infinito. Note que a Gaussiana possui uma lei estável e funciona como um atrator para todas as distribuições com momento finito. Todas as outras leis estáveis são atratores para o caso em que o segundo momento for infinito.

**Teorema 2.3.2.**  $f(t) = e^{\phi(t)}$  é a função característica de uma distribuição estável de expoente  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , e  $1 < \alpha \leq 2$  se, e somente se, tiver a forma

$$\phi(t) = i\mu t - \sigma|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right\}, \quad (2.24)$$

onde  $\mu$  é real,  $\sigma \geq 0$ , e  $\beta \in [-1, 1]$ . Para  $\alpha = 1$ , a forma da função é dada por

$$\phi(t) = i\mu t - \sigma|t| \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln|t| \right\}. \quad (2.25)$$

*Demonstração.* O objetivo é encontrar uma forma fechada para representação integral canônica,

$$\begin{aligned} \ln f(t) = i\mu t + c_1 \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} \\ + c_2 \int_0^{\infty} \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para  $0 < \alpha < 1$  as integrais,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{u}{1+u^2} \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{u}{1+u^2} \frac{du}{u^{1+\alpha}}, \quad (2.27)$$

são finitas, de modo que serão associadas à constante  $\mu$ , tal que,

$$\ln f(t) = i\mu't + c_1 \int_{-\infty}^0 (e^{itu} - 1) \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{\infty} (e^{itu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \quad (2.28)$$

Assumindo  $t > 0$  e fazendo a substituição  $\nu = -tu$  na primeira integral e  $\nu = tu$  na segunda, obtêm-se

$$\ln f(t) = i\mu't + t^\alpha \left[ c_1 \int_0^{\infty} (e^{-i\nu} - 1) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{\infty} (e^{i\nu} - 1) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} \right]. \quad (2.29)$$

Usando o teorema de Cauchy na segunda integral sobre o caminho, no primeiro quadrante do plano complexo, formado pelos segmentos  $\overrightarrow{OR}$  no eixo real,  $\overrightarrow{iR\bar{O}}$  no eixo imaginário e

o arco de círculo com centro na origem e raio  $R$ . Fazendo  $R \rightarrow \infty$ , têm-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (e^{i\nu} - 1) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} &= \int_0^{i\infty} (e^{i\nu} - 1) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} \\ &= i^{-\alpha} \int_0^\infty (e^{-y} - 1) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} = e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} L(\alpha), \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde

$$L(\alpha) = \int_0^\infty (e^{-y} - 1) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} < 0. \quad (2.31)$$

Note que a primeira integral é o complexo conjugado da segunda, de modo que,

$$\int_0^\infty (e^{-i\nu} - 1) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} L(\alpha). \quad (2.32)$$

Substituindo na equação 2.29,

$$\ln f(t) = i\mu't + t^\alpha L(\alpha) [c_1 e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} + c_2 e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}], \quad (2.33)$$

e usando a fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \ln f(t) &= i\mu't + t^\alpha L(\alpha) \left[ (c_1 + c_2) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) + i(c_1 - c_2) \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] \\ &= i\mu't + t^\alpha L(\alpha) (c_1 + c_2) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \left[ 1 + i \frac{(c_1 - c_2) \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{(c_1 + c_2) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sabendo que  $0 < \alpha < 1$ , então  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) > 0$ , de modo que se for posto,

$$\begin{aligned} \sigma &= -L(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) & c &\geq 0 \\ \beta &= \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} & -1 &\leq \beta \leq 1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

encontra-se para  $t > 0$  a seguinte expressão,

$$\ln f(t) = i\mu't - \sigma t^\alpha \left( 1 + i\beta \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right). \quad (2.36)$$

Para  $t < 0$  e sabendo que  $\ln f(t) = \overline{\ln f(-t)}$ ,

$$\ln f(t) = -i\mu'(-t) - \sigma(-t)^\alpha \left(1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right), \quad (2.37)$$

e assim para qualquer  $t$  é possível encontrar que

$$\ln f(t) = i\mu't - \sigma|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right). \quad (2.38)$$

Para  $1 < \alpha \leq 2$ , inserindo o fator  $u - u$  nas duas integrais e modificando a constante  $\mu$ , pode-se reescrever a equação 2.23 da seguinte forma,

$$\ln f(t) = i\mu''t + c_1 \int_{-\infty}^0 (e^{itu} - 1 - itu) \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \quad (2.39)$$

Assumindo  $t > 0$  e fazendo as mesmas substituições,  $\nu = -tu$  e  $\nu = tu$ , é possível obter

$$\ln f(t) = i\mu''t + t^\alpha \left[ c_1 \int_0^{\infty} (e^{-i\nu} - 1 + i\nu) \frac{d\nu}{|\nu|^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{\infty} (e^{i\nu} - 1 - i\nu) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} \right]. \quad (2.40)$$

Usando novamente o teorema de Cauchy e o mesmo caminho à segunda integral da expressão acima, pode-se obter que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (e^{i\nu} - 1 - i\nu) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} &= \int_0^{i\infty} (e^{i\nu} - 1 - i\nu) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} \\ &= i^{-\alpha} \int_0^{\infty} (e^{-y} - 1 + y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} = e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} M(\alpha), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde

$$M(\alpha) = \int_0^{\infty} (e^{-y} - 1 + y) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} > 0. \quad (2.42)$$

Como a primeira integral é o complexo conjugado desta última, então,

$$\int_0^{\infty} (e^{-i\nu} - 1 + i\nu) \frac{d\nu}{\nu^{1+\alpha}} = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} M(\alpha). \quad (2.43)$$



Substituindo em 2.40,

$$\ln f(t) = i\mu''t + t^\alpha [c_1 e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} M(\alpha) + c_2 e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} M(\alpha)], \quad (2.44)$$

sabendo que  $\cos(\frac{\pi}{2}\alpha) < 0$  para  $1 < \alpha \leq 2$ , pode-se escrever a constante positiva  $\sigma$  da seguinte forma,

$$\sigma = -M(\alpha)(c_1 + c_2) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right), \quad (2.45)$$

fazendo  $\beta$  igual ao feito para  $0 < \alpha < 1$  se é obtido a mesma expressão.

Para  $\alpha = 1$  e novamente assumindo  $t > 0$ , a segunda integral da equação 2.23 pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\int_0^\infty \left( e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \frac{du}{u^2} \right) = \int_0^\infty \frac{\cos(tu) - 1}{u^2} du + i \int_0^\infty \left( \sin(tu) - \frac{tu}{1+u^2} \right) \frac{du}{u^2}, \quad (2.46)$$

sabendo que,

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (2.47)$$

e escrevendo as integrais de forma conveniente fazendo-se o uso de limites, tem-se,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \frac{du}{u^2} \right) &= -\frac{\pi}{2}t + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_\epsilon^\infty \frac{\sin(tu)}{u^2} du - t \int_\epsilon^\infty \frac{1}{u(1+u^2)} du \right] \\ &= -\frac{\pi}{2}t + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -t \int_\epsilon^{t\epsilon} \frac{\sin \nu}{\nu^2} d\nu + t \int_\epsilon^\infty \left( \frac{\sin \nu}{\nu^2} - \frac{1}{\nu(1+\nu^2)} \right) d\nu \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

mas sabendo que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^{t\epsilon} \frac{\sin \nu}{\nu^2} d\nu = \ln t, \quad (2.49)$$

a integral acima pode ser escrita como,

$$\int_0^\infty \left( e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \frac{du}{u^2} \right) = -\frac{\pi}{2}t - it \ln t + it\kappa. \quad (2.50)$$

Como a primeira integral é o complexo conjugado, tem-se,

$$\int_{-\infty}^0 \left( e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \frac{du}{u^2} \right) = -\frac{\pi}{2}t + it \ln t - it\kappa. \quad (2.51)$$

Substituindo na equação 2.23, é possível concluir para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \ln f(t) &= i\mu t + c_1 \left( -\frac{\pi}{2}t + it \ln t - it\kappa \right) + c_2 \left( -\frac{\pi}{2}t - it \ln t + it\kappa \right) \\ &= i\mu' - (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2}t + i(c_1 - c_2)t \ln t. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para  $t < 0$ , usando novamente a relação  $\ln f(t) = \overline{\ln f(-t)}$ ,

$$\begin{aligned} \ln f(t) &= -i\mu'(-t) - (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2}(-t) - i(c_1 - c_2)(-t) \ln(-t) \\ &= i\mu't - (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2}|t| + i(c_1 - c_2)t \ln |t|, \end{aligned} \quad (2.53)$$

escrevendo as constantes abaixo,

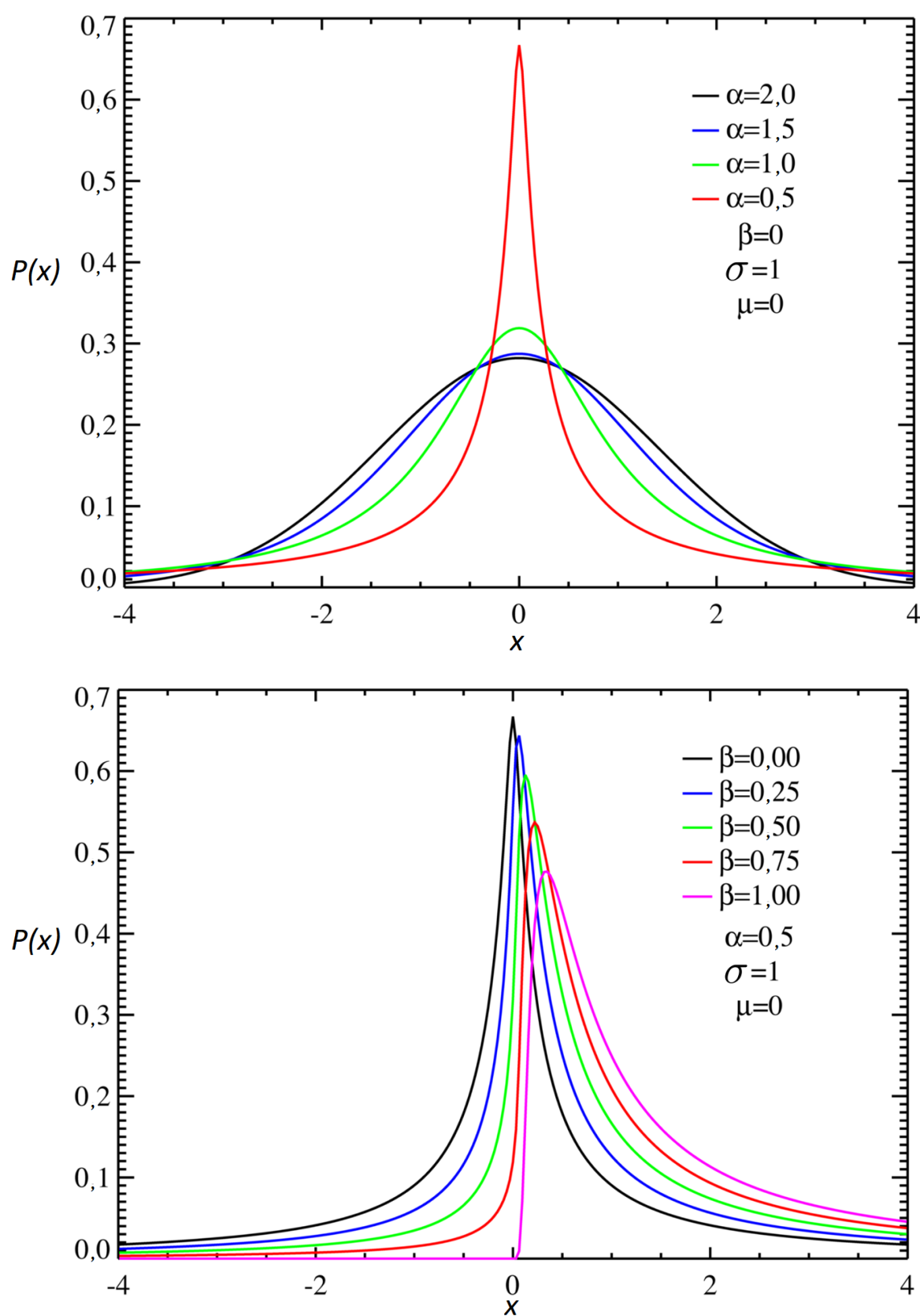
$$c = (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2} \quad \beta = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}, \quad (2.54)$$

é possível escrever para qualquer  $t$  a seguinte expressão,

$$\ln f(t) = i\mu't - c|t| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \frac{t}{|t|} \ln |t| \right]. \quad (2.55)$$

□

A figura 2.4 mostra o gráfico de algumas distribuições para um dado conjunto de parâmetros.



**Figura 2.4:** Exemplo de distribuições estáveis para alguns valores dos parâmetro  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ .

## 2.4 Distribuição de Lévy $\alpha$ -estável simétrica

Dada a forma canônica fechada do teorema 2.3.2. A função de distribuição de uma lei estável pode ser escrita a partir da seguinte transformada de Fourier,

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} e^{-ixt} dt. \quad (2.56)$$

A integral acima admite uma forma analítica fechada para poucos valores dos parâmetros, os casos mais conhecidos são:

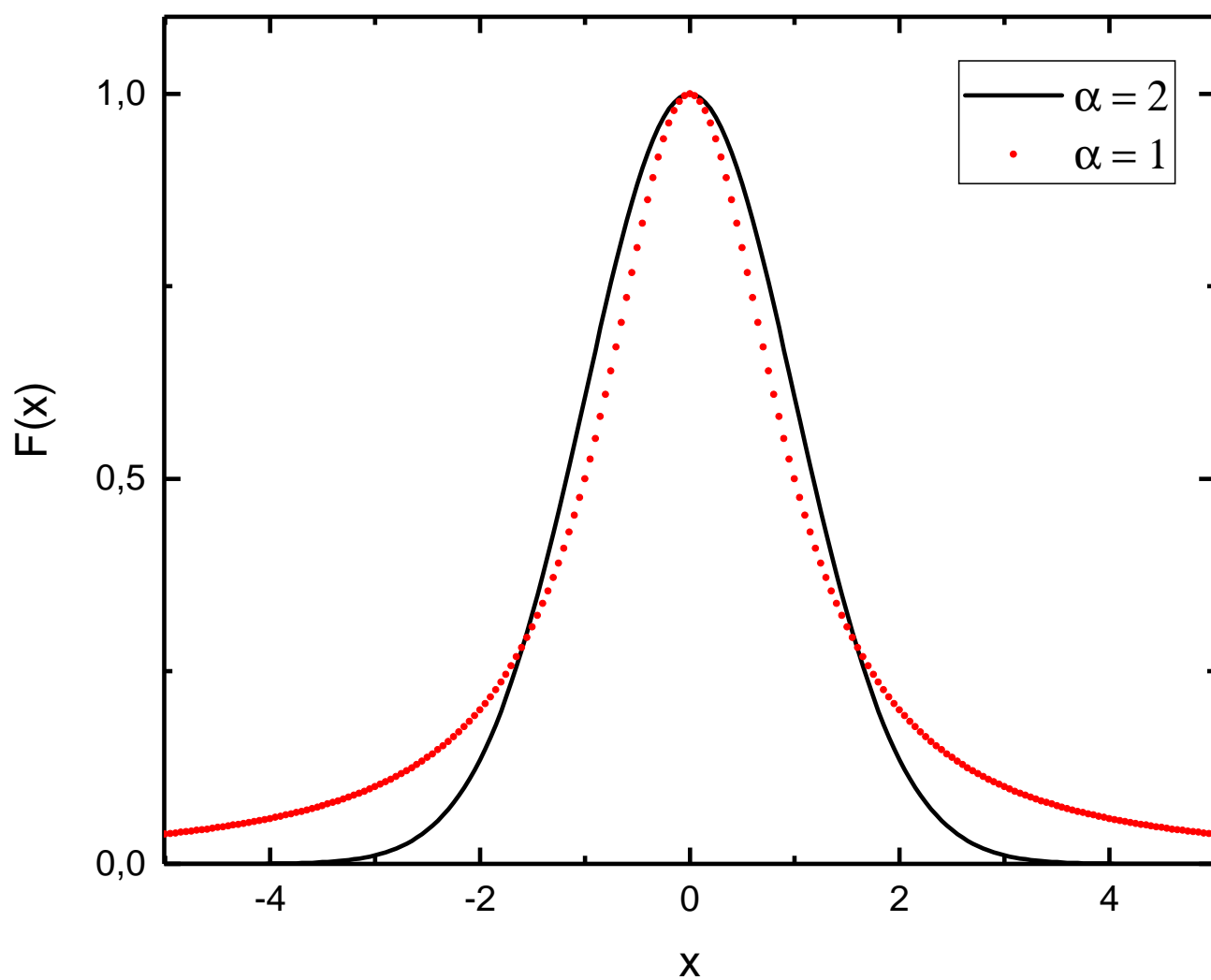
- $\alpha = 2$  (distribuição normal);
- $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  (distribuição de Cauchy).

Todos os parâmetros que estão associados à lei estável reproduzem características bem específicas no seu comportamento funcional (2.4). O parâmetro  $\alpha$  também é conhecido como índice de Lévy e é o que provoca a maior mudança na função. Dado um valor de  $\alpha$ , modificações em  $\beta$  provocam inclinações da curva, e é denominado de parâmetro de assimetria. Realizando modificações no parâmetro  $\sigma$  a curva sofre uma mudança de escala, sendo chamado de fator de escala. E por último, o coeficiente  $\mu$  é o fator de deslocamento, ou seja, este provocará uma translação no eixo  $x$ . Considerando  $\mu = 0$  e  $\beta = 0$ , tem-se uma curva centralizada e com simetria no eixo  $y$  [65]. Este caso especial das distribuição estáveis é denominada de distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica, e é dada por,

$$P_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma|t|^{\alpha}} e^{-ixt} dt, \quad (2.57)$$

devido à simetria da função, é possível escrever em termos da transformada cosseno de Fourier,

$$P_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma|t|^{\alpha}} \cos(xt) dt. \quad (2.58)$$



**Figura 2.5:** Distribuições estáveis cujas formas fechadas são conhecidas: a distribuição de Cauchy ( $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , linha pontilhada vermelha), distribuição normal ( $\alpha = 2$ , linha sólida preta).

Uma propriedade de singular importância está associada ao comportamento assintótico das leis estáveis [66]. Apesar da escassa quantidade de formas fechadas, podemos fazer uma análise a partir de uma expansão em séries. Para isso, considere a integral 2.57, escrita da seguinte forma:

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty e^{-\sigma t^\alpha} e^{-i|x|t} dt \right], \quad (2.59)$$

fazendo a substituição  $z = i|x|t$  e lembrando que  $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ , tem-se,

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\pi|x|} \operatorname{Re} \left[ -i \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{|x|^\alpha} e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}} z^\alpha} e^{-z} dz \right], \quad (2.60)$$

fazendo a expansão em série de Taylor da função,

$$e^{-\frac{\sigma}{|x|^\alpha} e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}} z^\alpha} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \sigma^k}{k! |x|^{\alpha k}} e^{-i\frac{\pi\alpha k}{2}} z^{\alpha k}, \quad (2.61)$$

e substituindo na integral,

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \sigma^k}{k! |x|^{\alpha k+1}} \operatorname{Re} \left[ -i e^{-i\frac{\pi\alpha k}{2}} \int_0^\infty z^{\alpha k} e^{-z} dz \right] \quad (2.62)$$

sabendo que  $\operatorname{Re} \left[ -i e^{-i\frac{\pi\alpha k}{2}} \right] = -\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha k \pi}{2}\right)$ , e que a função Gama  $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ , é possível então concluir que,

$$P_\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \sigma^k}{k! |x|^{\alpha k+1}} \Gamma(\alpha k + 1) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha k \pi}{2} \right). \quad (2.63)$$

Como o seno se anula para  $k = 0$ , o somatório inicia em  $k = 1$ . Explicitando o primeiro termos dos demais, esta expansão se torna,

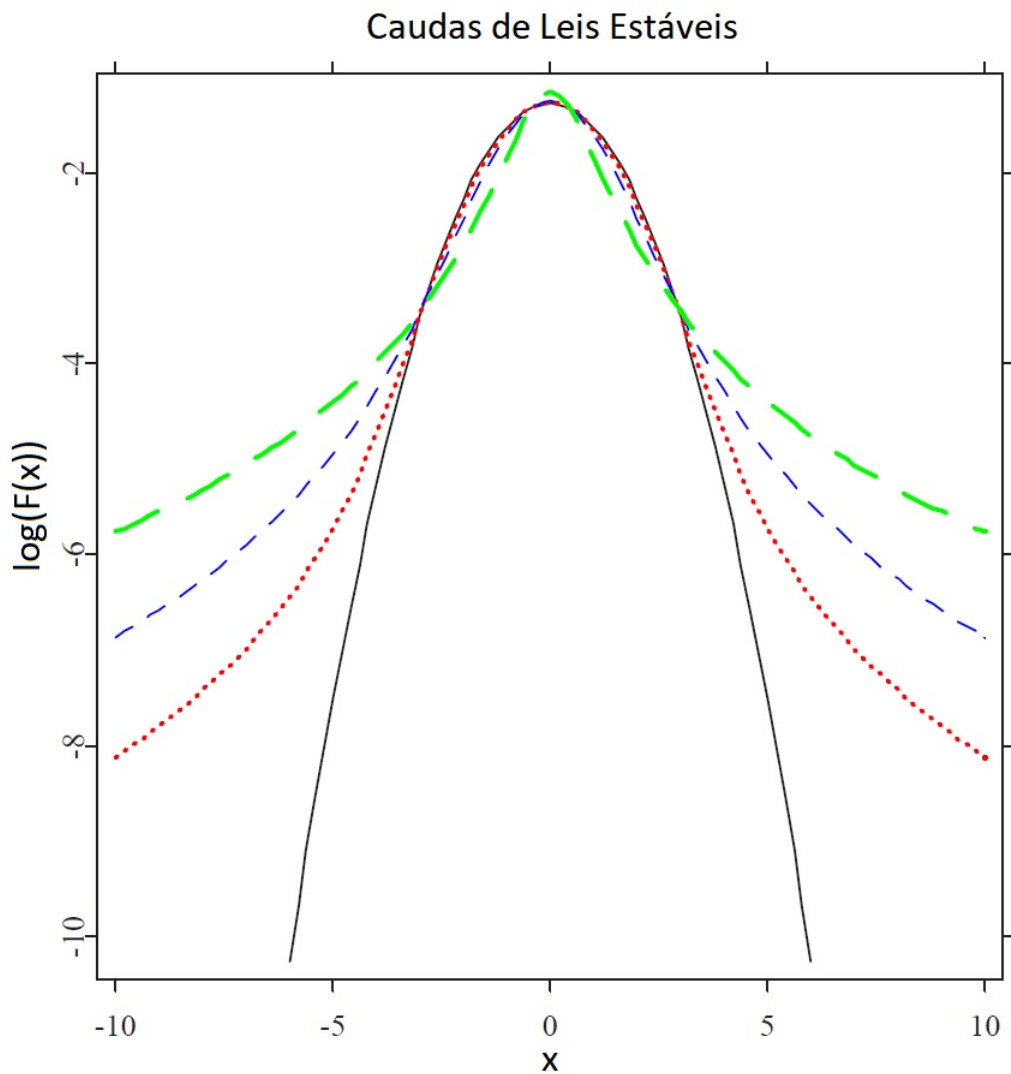
$$P_\alpha(x) = \frac{\sigma}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{|x|^{\alpha+1}} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha \pi}{2} \right) + \mathcal{O}(|x|^{-\alpha(k+1)-1}). \quad (2.64)$$

Da equação 2.64 é possível encontrar o comportamento assintótico da distribuição de Lévy

simétrica, analisando-a para grandes valores de  $x$ ,

$$P_\alpha(x) \sim \frac{\sigma}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{|x|^{\alpha+1}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (2.65)$$

Este comportamento condiciona que  $\alpha > 0$ , caso contrário  $\int P_\alpha(x)dx$  diverge. Já para o segundo momento central  $\int x^2 P_\alpha(x)dx \sim \int |x|^{1-\alpha}$ , de modo que a variância é infinita para  $0 < \alpha < 2$  [67, 68]. Todas as ditribuições estáveis exceto a normal possuem uma cauda que obedece a uma lei de potência  $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ , que tem como consequência um decaimento bem mais lento que o da normal (figura 2.6). As caudas-pesadas, caudas-longas ou leis de Pareto, como são denominadas, fazem com que os dados mesmos distantes (menor probabilidade) do centro da curva (maior probabilidade), tenham uma grande relevância na amostra. Graficamente também é possível notar a inexistência de um desvio padrão que ao contrário é bem definido em um distribuição normal, enquanto esta vai para zero muito rapidamente, as distribuições com cauda-pesada vão bem mais lentamente, e isto produz resultados e propriedades bastante distintas e de útil aplicação.



**Figura 2.6:** Gráfico semi-log das distribuições de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica para  $\alpha = 2$  (linha sólida preta),  $\alpha = 1,8$  (linha pontilhada vermelha),  $\alpha = 1,5$  (linha tracejada azul) and  $\alpha = 1$  (linha de traço longo verde). A cauda para  $\alpha = 2$  (normal) decai mais rapidamente (decaimento exponencial) que as outras distribuições que possuem uma cauda-pesada (decaimento de lei de potência) [64].



## Funções Hipergeométricas

*“Dentro de nós há uma coisa que não tem nome, essa coisa é o que somos.”*

---

José Saramago

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre a função hipergeométrica, primeiramente abordando a função hipergeométrica de Gauss e logo depois abordaremos a função hipergeométrica generalizada, sua relação com várias funções elementares e especiais, assim como a sua importância em diversos fenômenos físicos.

### 3.1 Função hipergeométrica de Gauss

#### 3.1.1 Equação Hipergeométrica

O estudo das equações diferenciais é um dos ramos mais importantes da matemática, tanto pelo interesse de diversas propriedades e riqueza de assuntos que envolvem o tema em si quanto pela imensa quantidade de aplicações provenientes desse ramo de estudo. Na Física, grandes teorias e modelização de sistemas estão diretamente conectadas com equações diferenciais: Mecânica de Newton, formalismo de Lagrange, equações de Maxwell e a equação de Schrodinger são alguns exemplos. Outro fato relevante de se notar é que as equações diferenciais que surgem destes problemas são equações diferenciais lineares de segunda ordem. Uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem pode ser

escrita de forma geral como,

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + P(x)\frac{d}{dx}y(x) + Q(x)y(x) = F(x), \quad (3.1)$$

onde  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $F(x)$  são funções reais ou complexas, no caso em que  $F(x) = 0$  a equação é dita homogênea (que é o caso que iremos tratar). Outra característica recorrente nas equações mais presentes nas aplicações, tanto da Física quanto da própria Matemática, é a presença de pontos singulares nestas equações, especificamente três pontos singulares regulares. Mas o que significa um ponto ser singular regular? Os pontos no domínio de uma equação diferencial podem ser denominados de ordinários e singulares [69–71].

**Definição 3.1.1.** *Se as funções  $P(x)$  e  $Q(x)$  são ambas analíticas num dado ponto  $x_0$ , então este é um ponto ordinário da equação diferencial. Se ao menos umas das funções  $P(x)$  e  $Q(x)$  não forem analíticas em  $x_0$ , então  $x_0$  é um ponto singular da equação diferencial.*

Os pontos ordinários e singulares são importantes quando se tenta obter soluções na equação diferencial pelo método de séries. Os pontos singulares se classificam em regulares e irregulares. Como buscamos apontar, os pontos que são regulares carregam um interesse especial.

**Definição 3.1.2.** *Dada uma equação diferencial na forma*

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + P(x)\frac{d}{dx}y(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (3.2)$$

*com  $P(x)$  e  $Q(x)$  sendo funções racionais e  $x_0$  um ponto singular da equação diferencial. Se as funções*

$$H_1(x) = (x - x_0)P(x) \qquad H_2(x) = (x - x_0)^2Q(x) \quad (3.3)$$

*forem ambas analíticas no ponto  $x_0$ , então este é um ponto singular regular. Se pelo menos uma das funções não for analítica, então  $x_0$  é um ponto singular irregular.*

Se a condição de existência de três pontos singulares regulares mais a condição de que o ponto no infinito seja ordinário for imposta à equação 3.2, esta pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}y(x) + \left[ \frac{1-\alpha-\alpha'}{x-x_1} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-x_2} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-x_3} \right] \frac{d}{dx}y(x) + \\ + \left[ \frac{\alpha\alpha'(x_1-x_2)(x_1-x_2)}{x-x_1} + \frac{\beta\beta'(x_2-x_3)(x_2-x_1)}{x-x_2} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma\gamma'(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{x-x_3} \right] \frac{y(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são os pontos singulares regulares e  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma$  e  $\gamma'$  são expoentes associados respectivamente a estes pontos. A equação acima representa a forma mais geral de uma equação diferencial, ordinária, linear, de segunda ordem, homogênea com três pontos singulares regulares, e é chamada de equação de Riemann-Papperitz [71]. Se for imposto que um dos pontos seja no infinito, a seguinte condição deve ser satisfeita,

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1, \quad (3.5)$$

denominada de condição de Riemann. A equação 3.4 quando submetida a um conjunto de transformações lineares pode-se deslocar a posição dos pontos regulares sem alterar a forma da equação. Fazendo com que os pontos regulares  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  sejam, respectivamente, 0, 1 e  $\infty$ , e escrevendo

$$\alpha + \beta + \gamma = a \quad \alpha + \beta' + \gamma = b \quad 1 + \alpha - \alpha' = c \quad (3.6)$$

obtem-se,

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2}y(x) + [c - (a+b+1)x] \frac{d}{dx}y(x) - aby(x) = 0. \quad (3.7)$$

A equação acima é denominada de equação de Gauss ou equação hipergeométrica [72]. Perceba-se que nós partimos de uma equação diferencial de segunda ordem geral e admitimos a existência de três pontos singulares regulares. Desse resultado chega-se a uma importante conclusão: a solução de qualquer equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem e homogênea com três pontos singulares regulares pode ser escrita em termos de uma solução da equação hipergeométrica. A equação de Riemann-Papperitz (3.4) admite ainda um conjunto de combinações envolvendo os expoentes e os pontos regulares de modo que é possível obter diferentes equações hipergeométricas. Levando-se em conta todos os casos existentes, há um conjunto de 24 soluções diferentes. Como o

espaço solução é bidimensional existem certas relações envolvendo estas soluções de modo a se construir a solução geral. Foi Ernst Eduard Kummer (1810-1893) quem encontrou as 24 soluções conhecidas como soluções de Kummer e suas relações denominadas de relações de Kummer. Kummer também foi o primeiro a usar o termo “hipergeométrica” para a série estudada por Gauss [72, 73].

### 3.1.2 Função hipergeométrica

Vamos a partir de agora encontrar uma solução geral para equação hipergeométrica (3.7) a partir do ponto singular regular  $x = 0$ . Para isto será usado o método de Frobenius que consistirá na suposição de uma solução dada pela série,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r}. \quad (3.8)$$

Calculando as derivadas primeira e segunda e substituindo em (3.7), obtém-se

$$\begin{aligned} x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) u_n x^{n+r-2} + [c - x(1+b+a)] \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) u_n x^{n+r-1} - ab \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

realizando algumas multiplicações,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) u_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) u_n x^{n+r} + \\ c \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) u_n x^{n+r-1} - (1+b+a) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) u_n x^{n+r} - \\ ab \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora é necessário que todas as potências de  $x$  sejam as mesmas. Usando a substituição  $m = n - 1$  nos termos com potência  $x^{n+r-1}$  e retornando ao índice  $n$ , a equação se torna

$$\begin{aligned} \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r)(n+r+1) u_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) u_n x^{n+r} + \\ c \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) u_{n+1} x^{n+r} - (1+b+a) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) u_n x^{n+r} - \\ ab \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Desenvolvendo os termos com  $n = -1$  de modo que os somatórios iniciem do mesmo ponto,

$$\begin{aligned} r(r-1) u_0 x^{r-1} + c r u_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r+1) u_{n+1} x^{n+r} - \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) u_n x^{n+r} + c \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1) u_{n+1} x^{n+r} - \\ (1+b+a) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) u_n x^{n+r} - ab \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+r} = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

reunindo os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} [r(r-1) + cr] u_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(n+r+c)(n+r+1)] u_{n+1} - \right. \\ \left. [(n+r)(n+r+b+a) + ab] u_n \right\} x^{n+r} = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

após algumas manipulações é possível mostrar que o termo  $(n+r)(n+r+b+a) + ab$ , pode ser escrito como,

$$(n+r)(n+r+b+a) + ab = (n+r+a)(n+r+b), \quad (3.14)$$

de modo que se é obtida, a seguinte equação:

$$[r(r-1) + cr] u_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+r+c)(n+r+1) u_{n+1} - (n+r+a)(n+r+b) u_n \right] x^{n+r} = 0. \quad (3.15)$$

Por meio da igualdade de polinômios surgem duas equações: uma equação indicial e uma relação de recorrência que são respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} r(r+c-1) &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{(n+r+a)(n+r+b)}{(n+r+c)(n+r+1)} u_n. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A equação indicial possui duas soluções dadas por  $r_1 = 0$  e  $r_2 = 1 - c$ . Como é bem sabido, as soluções obtidas pelo método de Frobenius dependem da natureza do termo

$$|r_1 - r_2| = |0 - (1 - c)| = |c - 1|, \quad (3.17)$$

de modo que será trabalhado o caso em que são garantidas duas soluções linearmente independentes. Com esse intuito se faz necessário que  $c$  não seja um número inteiro. Para  $r_1 = 0$  a relação de recorrência fica,

$$u_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} u_n, \quad (3.18)$$

calculando-se alguns termos é possível encontrar o seguinte termo geral da série

$$u_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-2)(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-2)(b+n-1)}{1.2.3\dots nc(c+1)(c+2)\dots(c+n-2)(c+n-1)} u_0. \quad (3.19)$$

Fazendo a substituição na série 3.8 encontra-se a primeira solução da equação hipergeométrica, dada por

$$y_1(x) = u_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!} \right\}, \quad (3.20)$$

o termo que aparece entre chaves é descrito através da seguinte definição [74, 75].

**Definição 3.1.3.** *A função definida pela série*

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!} \quad (3.21)$$

*é chamada de função hipergeométrica.*

Para a outra raiz  $r_2 = 1 - c$ , usando um procedimento semelhante ao que foi feito para

primeira solução, obtém-se

$$y_2(x) = u'_0 x^{1-c} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} (-c+a+1), (-c+b+1) \\ (2-c) \end{matrix} ; x \right]. \quad (3.22)$$

Como as soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são linearmente independentes, logo a combinação linear das mesmas formam a solução geral da equação 3.7. Estas duas soluções fazem parte do conjunto das 24 soluções de Kummer, onde as outras 22 podem ser obtidas calculando-se a solução nos outros pontos regulares e realizando as devidas transformações nos expoentes. Com os cálculos anteriores foi possível visualizar uma obtenção formal para função hipergeométrica. A partir de agora vamos trabalhar com algumas formas algébricas de descrever esta função. Para isto precisamos fazer uso da função Gama e do símbolo de Pochhammer [69, 71, 75].

**Definição 3.1.4.** *Seja  $z$  um número pertencente ao conjunto dos números Complexos e  $n$  pertencente ao conjunto dos números Naturais. O símbolo de Pochhammer é definido a partir da seguinte expressão*

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1); \quad (z)_0 = 1. \quad (3.23)$$

Usando então o símbolo de Pochhammer nos expoente  $a$ ,  $b$  e  $c$ , a função hipergeométrica pode ser escrita como

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.24)$$

**Definição 3.1.5.** *A função definida pela integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (3.25)$$

onde  $x$  pode assumir, inclusive, valores complexos, é chamada de função Gama.

A função Gama é uma das funções especiais mais importantes. Ela possui conexões com muitas outras funções e possui propriedades de grande interesse [71, 75]. Historicamente ela foi descoberta por Leonhard Paul Euler (1707-1783) quando trabalhava no problema de encontrar uma função que estendia o domínio da função fatorial. A função

gama como posta na página anterior é definida para o conjunto dos números complexos cuja parte real seja maior que zero. Mas pode ser estendida analiticamente a menos dos inteiros negativos incluindo o zero (são os polos da função), através da seguinte expressão [72, 75]

$$\Gamma(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (3.26)$$

Para se obter uma das propriedades mais importantes da função Gama é necessário integrar (3.25) por partes, de modo que se obtém

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = -t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (x-1) t^{x-2} e^{-t} dt. \quad (3.27)$$

Observando o lado direito da equação o primeiro termo se anula e o segundo termo é simplesmente  $\Gamma(x-1)$ , ou seja, chega-se à seguinte conclusão

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1). \quad (3.28)$$

Supondo que  $x$  seja um número natural  $n$ , têm-se

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 \times \Gamma(1) \quad (3.29)$$

ou seja,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (3.30)$$

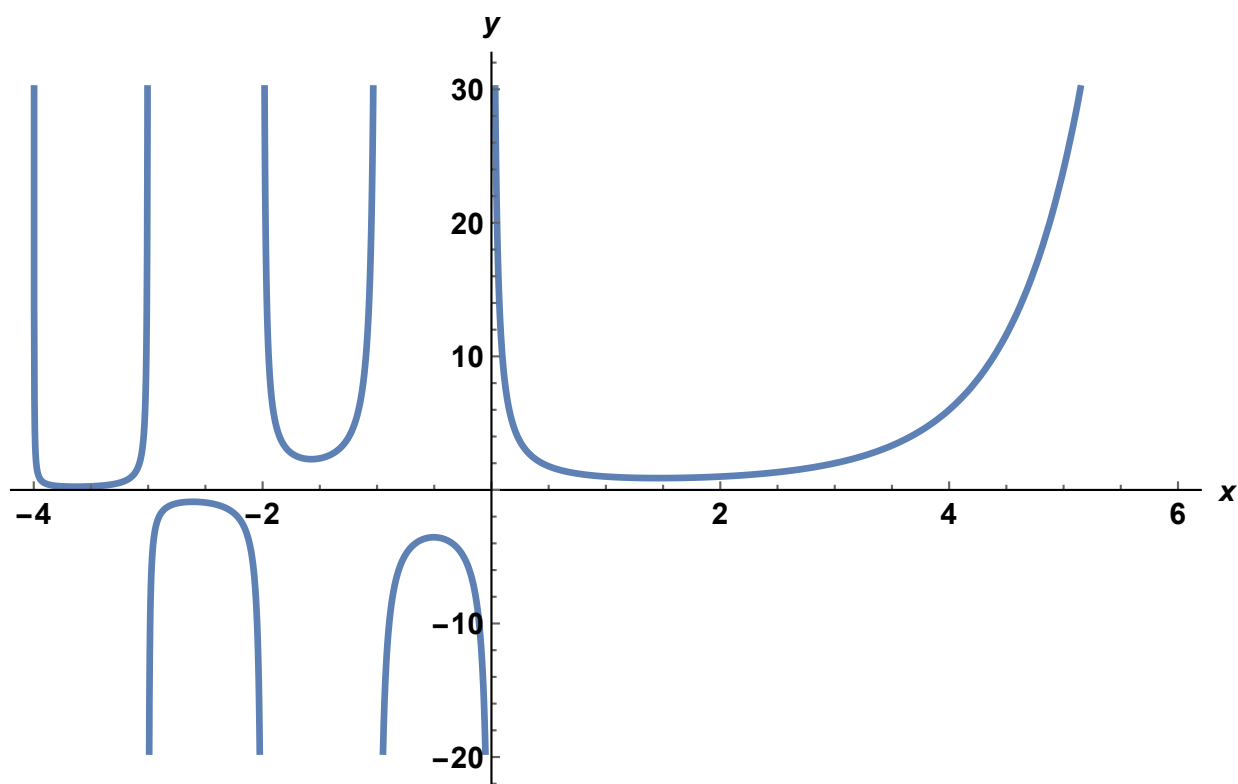
pode ser escrito também

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (3.31)$$

que mostra a associação que há entre a função Gama e o fatorial, de modo que a primeira pode ser pensada como uma generalização da última, como havia sido mencionado. Seja agora  $z$  um número complexo e  $n$  um número natural, desenvolvendo a seguinte expressão,

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)! = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+2)(z+1)z\Gamma(z), \quad (3.32)$$





**Figura 3.1:** Gráfico da função Gama,  $\Gamma(x)$ , que representa uma generalização do fatorial e é uma das funções especiais mais importantes.

note que o termo que multiplica  $\Gamma(z)$  é exatamente o símbolo de Pochhammer de  $z$ , de modo que

$$\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = (z)_n. \quad (3.33)$$

Aplicando a relação acima em 3.24, têm-se uma outra forma de escrever a função hipergeométrica, dada por

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}. \quad (3.34)$$

A equação 3.34, além de trazer à superfície uma relação entre a função de Gauss e a função Gama, permite calcular mais facilmente algumas operações. Como exemplo, considere o operador  $\frac{d}{dx}$  aplicado a  ${}_2F_1$

$$\frac{d[{}_2F_1]}{dx} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n+1)}, \quad (3.35)$$

fazendo a substituição  $m = n - 1$  e usando 3.28,

$$\begin{aligned} \frac{d[{}_2F_1]}{dx} &= \frac{ab}{c} \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+m)\Gamma(b+1+m)}{\Gamma(c+1+m)} \frac{x^m}{\Gamma(m+1)} \\ \frac{d[{}_2F_1]}{dx} &= \frac{ab}{c} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a+1, b+1 \\ c+1 \end{matrix} ; x \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando  $\frac{d^n}{dx^n}$  é possível mostrar por indução que

$$\frac{d[{}_2F_1]}{dx} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix} ; x \right]. \quad (3.37)$$

Na próxima seção será descrito o comportamento geral da convergência de uma série hipergeométrica. No caso específico da função de Gauss, a série é convergente para  $|x| < 1$  e divergente para  $|x| > 1$ , no caso de  $|x| = 1$ ; esta converge absolutamente se  $Re(a+b-c) < 0$ , condicionalmente se  $0 \leq Re(a+b-c) < 1$  e diverge se  $Re(a+b-c) \geq 0$  [72, 73, 75].

### 3.1.3 Representação Integral

A função de Gauss, assim como sua generalização, admite uma representação integral que, além de facilitar em algumas aplicações, permite construir extensões analíticas para a série 3.21. Existem duas representações integrais importantes e são creditadas a dois matemáticos que deram grandes contribuições ao desenvolvimento do estudo desta série: A representação integral de Euler e a representação integral de Barnes [75, 76]. Para o desenvolvimento da representação integral se faz necessário o uso da função Beta que é definida pela integral [69, 71],

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (3.38)$$

que está relacionada à função Gama através da seguinte expressão:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (3.39)$$

Partindo da expressão 3.34 e reorganizando os termos como se segue,

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(a+n)x^n}{\Gamma(a)n!}, \quad (3.40)$$

multiplicando pelo fator  $\frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b)}$ , têm-se,

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(a+n)x^n}{\Gamma(a)n!}. \quad (3.41)$$

Usando a relação entre as funções Gama e Beta acima (3.39) e o símbolo de Pochhammer,

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} B(b+n, c-b) \frac{(a)_n x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt \frac{(a)_n x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (tx)^n dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Note que o somatório  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (tx)^n = 1 + axt + \frac{a(a+1)}{2!} (xt)^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} (xt)^n + \dots$  é a série de Taylor da função  $(1 - xt)^{-a}$  para  $|x| < 1$  (região de convergência da série hipergeométrica). Substituindo, obtém-se

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt. \quad (3.43)$$

A expressão acima é a representação integral de Euler para a função hipergeométrica [75, 77].

A próxima representação integral surge no início do século XX quando o matemático inglês Ernest Barnes (1874 – 1953) desenvolve uma nova forma de tratar a função hipergeométrica [78]. Esta nova abordagem consiste em construir as soluções da equação de Gauss como integrais de linha no plano complexo. A forma como será tratada logo abaixo será fazendo-se o uso da transformada de Mellin [79], definida logo a seguir.

**Definição 3.1.6.** *A integral*

$$M[f] = F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad (3.44)$$

é chamada de transformada de Mellin da função  $f(x)$  com respeito ao parâmetro complexo  $s$ . A transformada inversa é dada por

$$M_{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} x^{-s} F(s) ds. \quad (3.45)$$

Para encontrar mais uma representação integral da função de Gauss, pode-se partir da seguinte transformação de Mellin:

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; -x \right] dx, \quad (3.46)$$

fazendo uso da representação integral de Euler na equação acima,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt dx \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+xt)^a} dx dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Note que a integral em  $x$  é a transformada de Mellin da função  $(1+xt)^{-a}$  que é tabelada e é igual à  $t^{-s} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$  [80]. Substituindo e fazendo uso da relação 3.39,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-s-1} (1-t)^{c-b-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b-s)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-s)} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

De acordo com as condições de existência dadas pelo teorema de inversão de Mellin, pode-se construir a transformação inversa, que é dada por,

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} (-x)^{-s} ds, \quad (3.49)$$

para  $0 < k < \min(Re(a), Re(b))$  e  $c$  não sendo um inteiro não-positivo. Existem outras formas mais precisas para se chegar a essa integral. Barnes em seu trabalho mostra que a integral (vide teorema abaixo) é uma solução (além de outras integrais) da equação hipergeométrica (3.7) [78, 81]. Uma outra alternativa é mostrar que a integral (3.50) é analítica na região  $|arg(-x)| < \pi$  e a partir do teorema de resíduos, analisando os polos da função Gama, chegar à expressão da função de Gauss [82].

**Teorema 3.1.1** (Representação Integral de Barnes).

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} (-x)^s ds \quad (3.50)$$

para  $|arg(-x)| < \pi$ .

Existe uma representação similar a esta para generalização da série hipergeométrica  ${}_pF_q$ , e é vital para regularização que será feita via teorema de Borel no próximo capítulo de somas de regularização. As representações de Euler e Barnes já estendem analiticamente o domínio desta função.

## 3.2 Função Hipergeométrica Generalizada

Na seção anterior foi vista, de modo mais formal, a construção da função hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  e algumas propriedades que servem de alicerce para esta, de modo que permite ter uma visualização mais ampla. A função de Gauss possui características e uma quantidade tão imensa de relações com outras funções que só o fato de podermos escrever todas as soluções de uma certa equação diferencial (EDO homogênea de segunda ordem com três pontos singulares) é justificativa suficiente para cogitar uma generalização da mesma.

Um dos primeiros trabalhos que tratam sobre a ideia de generalizar esta função é de Clausen (1801-1885) com a introdução de dois parâmetros, um no denominador e outro no numerador, ou seja, a série  ${}_3F_2$  [83]. Nesta linha de pensamento surgiram, ainda no começo do século XX, muitos teoremas que permitiram a construção de novas séries e suas relações com as outras já conhecidas [84–86]. A forma generalizada mais conhecida atualmente para a série hipergeométrica trabalha com a possibilidade de construção desta função a partir de  $p$  e  $q$  parâmetros. Sendo definida da seguinte forma [75]:

**Definição 3.2.1.** *A série*

$$\begin{aligned} {}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right] &= 1 + \frac{a_1 a_2 \dots a_p}{b_1 b_2 \dots b_q} \frac{x}{1!} + \dots + \frac{a_1 \dots (a_1 + n - 1) \dots a_p \dots (a_p + n - 1)}{b_1 \dots (b_1 + n - 1) \dots b_q \dots (b_q + n - 1)} \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde  $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_p)$  e  $\mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, \dots, b_q)$ , é chamada de função hipergeométrica generalizada.

Do mesmo modo que a função de Gauss obedece à equação diferencial 3.7, sua generalização também formará uma família de funções que obedece a seguinte equação diferencial [77],

$$\left( \mathcal{O}_x \prod_{i=1}^q (\mathcal{O}_x + b_i - 1) - x \prod_{j=1}^p (\mathcal{O}_x + a_j) \right) {}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right] = 0, \quad (3.52)$$

onde  $\mathcal{O}_x \equiv x \frac{d}{dx}$ . Se  $p$  e/ou  $q$  for zero, a coleção de parâmetros  $\mathbf{a}$  e/ou  $\mathbf{b}$  são omitidos, e o correspondente produto na equação Eq. (3.52) deve ser simplesmente entendido como a unidade. Nestes casos a notação se torna

$${}_0F_q \left[ \begin{matrix} - \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right], \quad {}_pF_0 \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ - \end{matrix} ; x \right], \quad {}_0F_0 \left[ \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} ; x \right]. \quad (3.53)$$

### 3.2.1 Convergência da série ${}_pF_q$

A função hipergeométrica obedece a certos critérios de existência que estão associados à convergência da série. Lembre-se que no caso da função de Gauss o método de Frobenius já colocava sobre os parâmetros um dado intervalo de restrição. A partir de agora serão tratados dois teoremas mais gerais que informam em quais condições a série 3.51 é convergente.

**Teorema 3.2.1.** *A série*

$${}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.54)$$

*converge absolutamente para todo  $x$  se  $p \leq q$  e para  $|x| < 1$  se  $p = q + 1$ , e diverge para todo  $x \neq 0$  se  $p > q + 1$ .*

*Demonstração.* Considere a seguinte razão entre dois termos da série 3.54,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_q)(n+1)} x \\ &= \frac{n^p (1 + \frac{a_1}{n})(1 + \frac{a_2}{n})\dots(1 + \frac{a_p}{n})}{n^{q+1} (1 + \frac{b_1}{n})(1 + \frac{b_2}{n})\dots(1 + \frac{b_q}{n})(1 + \frac{1}{n})} x, \end{aligned} \quad (3.55)$$

calculando o limite do módulo da razão acima para  $n \rightarrow \infty$ , têm-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^p}{n^{q+1}} \right| \left| \frac{(1 + \frac{a_1}{n})(1 + \frac{a_2}{n})\dots(1 + \frac{a_p}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n})(1 + \frac{b_2}{n})\dots(1 + \frac{b_q}{n})(1 + \frac{1}{n})} \right| |x|, \quad (3.56)$$

este limite tende para zero se  $p \leq q$ , é igual a  $|x|$  se  $p = q + 1$  e tende ao infinito, exceto

para  $x = 0$ , se  $p > q + 1$ . Pelo teste da razão o teorema está provado. □

Agora está provada a convergência da função de Gauss que corresponde ao caso  $p = q + 1$ . Fica claro que para  $|x| = 1$  o teste utilizado acima é inconclusivo. Para este outro caso segue o teorema abaixo para um conjunto de parâmetros reais.

**Teorema 3.2.2.** *A série*

$${}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.57)$$

com  $p = q + 1$  converge absolutamente para  $|x| = 1$  se  $\sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^p a_j > 0$ .

*Demonstração.* Considere o limite a seguir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{(n + b_1) \dots (n + b_q)(n + 1)}{(n + a_1) \dots (n + a_{q+1})} - 1 \right]. \quad (3.58)$$

É possível escrever esta expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{n^{q+1} + n^q (\sum_{i=1}^q b_i + 1) - n^{q-1} - n^q \left( \sum_{j=1}^{q+1} a_j \right) + \mathcal{O}(n^{q-1})}{n^{q+1} + \mathcal{O}(n^q)} \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{n^q \left( \sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^{q+1} a_j + 1 \right) + \mathcal{O}(n^q)}{n^{q+1} + \mathcal{O}(n^q)} \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

colocando o termo  $n^{q+1}$ , obtêm-se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^{q+1} a_j + 1 + \mathcal{O}(n^{-1})}{1 + \mathcal{O}(n^{-1})}. \quad (3.60)$$

Pelo teste de Raabe o limite acima deve ser maior que 1, logo,

$$\sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^{q+1} a_j + 1 > 1 \implies \sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^{q+1} a_j > 0. \quad (3.61)$$

□

Para o caso de os parâmetros serem complexos, a condição de convergência é dada por  $\operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^q b_i - \sum_{j=1}^{q+1} a_j \right) > 0$  [87].



Fica claro, com essa abordagem, que a série hipergeométrica generalizada se torna a função quando satisfeitos os critérios de convergência. Como será tratado posteriormente, para as outras condições, esta série é vista como uma solução formal da equação diferencial. Sempre se faz necessário que, mesmo para os casos acima, é possível se construir uma extensão analítica para a função hipergeométrica generalizada.

### 3.2.2 Derivada e Representação Integral

A generalização da função hipergeométrica admite expressões para o cálculo das derivadas e representações integrais semelhantes. De modo que o cálculo é o mesmo, a menos da nova quantidade de parâmetros. Sendo assim, as derivadas primeira e  $n$ -ésima são dadas por,

$$\begin{aligned}\frac{d [{}_pF_q]}{dx} &= \frac{\prod_{i=1}^p a_i}{\prod_{j=1}^q b_j} {}_pF_q \left[ \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_q + 1 \end{matrix} ; x \right] \\ \frac{d^n [{}_pF_q]}{dx^n} &= \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n} {}_pF_q \left[ \begin{matrix} a_1 + n, \dots, a_p + n \\ b_1 + n, \dots, b_q + n \end{matrix} ; x \right].\end{aligned}\quad (3.62)$$

A representação integral de Euler da função hipergeométrica generalizada pode ser escrita da seguinte forma:

$${}_{p+1}F_{q+1} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}, c \\ \mathbf{b}, d \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} {}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; tx \right] dt. \quad (3.63)$$

E no caso da representação integral de Barnes,

$${}_pF_q \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; x \right] = \frac{C_{ab}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(\mathbf{a}+s)}{\Gamma(\mathbf{b}+s)} (-x)^s ds, \quad (3.64)$$

onde as constantes  $C_{ab} = \frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})}$  e  $\Gamma(\mathbf{a}) = \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)$ .

Como já tecemos em seções anteriores, as representações de Euler e Barnes tem importância singular na teoria dessa família de funções [77, 87]. Permitem demonstrar diversas conexões entre diferentes tipos de funções hipergeométricas [88, 89], tanto na forma

dos parâmetros quanto na quantidade. Como pode ser visto, na representação de Euler há uma conexão entre as funções  ${}_{p+1}F_{q+1}$  e  ${}_pF_q$ . Já no caso de Barnes, a representação abre uma nova forma teórica de estudo, além de aumentar a abrangência do intervalo de existência, permitirá, como será visto, tomar uma solução puramente formal e torná-la analítica.

### 3.2.3 Relação com outras funções

A equação (3.52) permite uma estrutura de simetrias – um fato bem ilustrado para alguns casos particulares em [89] – tornando possível escrever uma dada  ${}_pF_q$  em termos de outras  ${}_mF_n$ . Esta equação, assim como a 3.7, contempla em alto grau diversas equações, de modo que muitas funções admitem serem representadas na forma de funções hipergeométricas generalizadas [40, 75, 90]. Abaixo segue alguns exemplos de funções elementares:

Função elementar	${}_pF_q$
$\exp[x]$	${}_0F_0 \left[ \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} ; x \right]$
$\sin[x]$	$x {}_0F_1 \left[ \begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix} ; -\frac{x^2}{4} \right]$
$\cos[x]$	${}_0F_1 \left[ \begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} ; -\frac{x^2}{4} \right]$
$\sin^{-1}[x]$	$x {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} ; x^2 \right]$
$\frac{1}{(1-x)^{-a}}$	${}_1F_0 \left[ \begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; x \right]$
$\log(1+x)$	$x {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} ; -x \right]$
$\cosh(x)$	${}_0F_1 \left[ \begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} ; \frac{x^2}{4} \right]$

Além das funções acima, os polinômios mais importantes no campo das funções especiais que possuem uma imensa importância para a Física [91], como é caso dos polinômios de Legendre que aparecem como parte da solução da equação de Schrödinger para o átomo

de Hidrogênio, podem ser representados em termos de funções hipergeométricas,

$$\begin{aligned} P_{2l}(x) &= \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -l, l + 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} ; x^2 \right] \\ P_{2l+1}(x) &= x \frac{(-1)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -l, l + 3/2 \\ 3/2 \end{matrix} ; x^2 \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

e a solução radial desta mesma equação que é dada em termos dos polinômios de Laguerre,

$$L_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{\alpha} {}_1F_1 \left[ \begin{matrix} -n \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; x \right], \quad (3.66)$$

onde  $\binom{n+\alpha}{\alpha}$  é o coeficiente binomial. É possível escrever um teorema geral sobre o produto de funções de Bessel,

$$J_\mu(ix) J_\nu(ix) = \frac{(ix)^{1/2(\mu+\nu)}}{2^{\mu+\nu} \Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\nu)} {}_2F_3 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2}(\mu+\nu+1), \frac{1}{2}(\mu+\nu)+1 \\ 1+\mu, 1+\nu, 1+\mu+\nu \end{matrix} ; x \right]. \quad (3.67)$$

Há uma quantidade imensa de exemplos, tais como, as funções de Jacobi, funções de Gegenbauer, funções de Chesbyshev etc.

# Capítulo 4

## Somas de Regularização

*“The divergent series are the invention of the devil, and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever.”*

---

Niels Henrik Abel

### 4.1 Séries divergentes

Um série infinita corresponde a soma de uma quantidade interminável de termos, podendo ser representada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (4.1)$$

A série acima é dita convergente se a sequência das somas parciais,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (4.2)$$

tende para um limite finito a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Caso contrário a série é divergente. O surgimento desse tipo de soma remonta desde da antiguidade, com Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) quando tentava solucionar o problema da área de um segmento parabólico. Este conceito levou muito tempo para ser aceito e corretamente tratado do ponto de vista formal pela matemática. Grande nomes nesta área remontam ao século *XIX*, como,

Laplace, Lagrange, Fourier e Cauchy. Mas matemáticos como Newton e Leibniz já haviam tratado sistematicamente estas somas.

O conceito de convergência foi bem estabelecido, principalmente com os trabalhos de Cauchy [92, 93], estas séries traziam uma aplicação ímpar para grandes problemas da Física e outras ciências. Mas e as séries divergente? São realmente inúteis? Matemáticos como Leonhard Euler (1707–1783), felizmente, deram atenção a estes objetos. Considere, como exemplo, a série de Grandi,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \quad (4.3)$$

usando a associatividade é possível obter que,

$$\begin{aligned} S &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \\ S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

É claro que, como é bem sabido, para as séries infinitas, a reordenação dos termos nem sempre é possível, mesmo no caso das séries condicionalmente convergentes esta manipulação leva a resultados distintos [94]. Considere agora a série geométrica,

$$s = 1 + q + q^2 + \dots q^n + \dots, \quad (4.5)$$

como é bem sabido esta série é convergente quando  $|q| < 1$  e sua soma é dada por,

$$s = \frac{1}{1 - q}. \quad (4.6)$$

Vamos pensar nesta soma no sentido completamente algébrico, ou seja, deixemos de lado por um momento os resultados usuais da análise. A série de Grandi pode ser escrita como,

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

ainda é possível pensar sobre esta serie a partir da construção, não das somas parciais, porém da média aritmética das somas parciais, de modo que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2}}{n + 1} = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

Alguns matemáticos, como Euler, associavam o valor  $1/2$  a esta série? Mas por qual motivo associar um valor a uma série divergente? E por que este valor é mais aceitável que 0 e 1? Uma das primeiras razões é o fato que por dois procedimentos distintos era possível obter o mesmo valor de  $1/2$ . E outro fato de grande relevância é que se uma série é convergente no sentido de Cauchy, ou seja,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ , a soma aritmética utilizada acima fornece o seguinte resultado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = s, \quad (4.9)$$

ou seja, essa nova forma de soma produz os mesmos resultados da análise usual para as séries convergentes. Isto permitiu toda uma construção de novas formas de somar as séries, conhecidas como somas de regularização. Esta soma como definida acima é chamada de soma de César. Estes novos métodos não são arbitrários, uma das condições essenciais é a regularidade, ou seja, métodos distintos devem produzir os mesmo valores quando aplicados às mesmas séries [95–97].

Um outro caso é oriundo do teorema de Abel [95]. É possível definir uma soma de regularização, conhecida como soma de Abel, da seguinte forma,

$$A(s) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^n x_n, \quad (4.10)$$

onde a série de potência acima é convergente dentro do intervalo  $|x| < 1$ . Aplicando a soma de Abel à série de Grandi, obtemos,

$$A(s) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Há vários casos em que se é possível encontrar séries que tenham um dado valor à luz de dada soma de regularização. No caso da soma de Abel, ela se mostra mais poderosa que a soma de César visto que fornece valores a séries que são divergentes através desta última. Os métodos de soma de regularização devem satisfazer duas condições fundamentais mais uma opcional [98].

**Definição 4.1.1.** *Seja  $A$  um método de regularização que atribui valores a sequências.  $A$  deve satisfazer as seguintes propriedades:*

1. **Regularidade** *Um método é dito regular se, toda vez que uma sequência  $s$  converge*

a  $x$ ,  $A(s) = x$ .

2. **Linearidade**  $A$  é dito se linear se este for um funcional linear sobre as sequências definidas, de modo que  $A(kr + s) = kA(r) + A(s)$ .

3. **Estabilidade** Se  $s$  é uma sequência iniciando em  $s_0$  e  $s'$  é a sequência obtida pela omissão do primeiro valor e subtraindo-se do resto, de forma que  $s'_n = s_{n+1} - s_0$ , então  $A(s)$  e  $A(s')$  são definidas, e  $A(s) = s_0 + A(s')$ .

Como exemplo de linearidade considere a série divergente,

$$s_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots, \quad (4.12)$$

sua soma de Abel é dada por,

$$A(s_1) = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}, \quad (4.13)$$

ainda é possível escrever que,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots \\ s_1 &= 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

de modo que,

$$s = 2s_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots \quad (4.15)$$

que é a série de Grandi cuja soma de Abel já sabemos que é  $\frac{1}{2}$ . Sabendo disso, apliquemos a soma de Abel da seguinte forma,

$$A(s) = A(s_1) + A(s_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

que corresponde à propriedade de linearidade.

## 4.2 Série de potência formal e Regularização

Dada uma equação diferencial é sabido que é possível encontrar soluções na forma de séries de potência [99]. Estas somas por sua vez podem não convergir, principalmente

quando a solução está associada a um ponto singular da equação. Assim como novos tipos de somas surgiram para séries numéricas, como vistas na seção anterior, toda uma teoria sobre como encontrar funções analíticas associadas às séries divergentes oriundas de uma equação diferencial vem sendo construída do século passado para cá. Um dos métodos mais importante na procura destas soluções é a soma de Borel (Émile Borel (1871 – 1956)) [100]. É possível iniciar este estudo a partir da definição abaixo:

**Definição 4.2.1.** *Considere uma sequência  $u_n$  infinita de números complexos, o objeto definido como*

$$\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad (4.17)$$

*é chamado de série de potência formal. O conjunto de todas as séries de potências formais é representado por*

$$\mathbb{C}[[z]]. \quad (4.18)$$

O termo “formal” implica que a série está sendo tomada como objeto de estudo antes do uso da análise, ou seja, puramente do ponto de vista algébrico [42, 101]. Mas para o caso em que  $\hat{u}$  converge, isto é, se para  $\rho > 0$  a série de potência converge para todo  $z$  com  $|z| < \rho$ , esta série define uma função  $f(z)$  analítica em uma vizinhança da origem, de modo que podemos afirmar que  $f$  é a soma de  $\hat{u}$ ,

$$f = \mathcal{S}\hat{u}. \quad (4.19)$$

No próximo capítulo, o teorema sobre a soma de Borel será usado na função que encontramos para descrever a distribuição de Lévy. Apesar desta ser definida nos reais, as ideias apresentadas aqui são obtidas para funções analíticas no plano complexo, o que continua sendo válido para parte imaginária nula. De modo que se faz necessário definir o conceito de setor no plano complexo, principalmente porque as funções, a priori, estão definidas em certas regiões que podem ser continuadas analiticamente.

**Definição 4.2.2.** *Seja  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  e  $\rho \in (0, \infty)$ , o setor  $S = S(d, \beta, \rho)$  do plano complexo é definido por*

$$S(d, \beta, \rho) := \left\{ z \in \mathbb{C}; |d - \arg(z)| < \frac{\beta}{2}, 0 < |z| < \rho \right\}, \quad (4.20)$$

*onde  $d$ ,  $\beta$  e  $\rho$  são chamados de direção, ângulo aberto e raio de  $S(d, \beta, \rho)$ , respectivamente.*



O primeiro uso realizado com as séries divergente é a expansão assintótica. A ideia de assintoticidade existe na série de Taylor, mas o termo expansão assintótica está associado às séries formais, ou seja, não se faz necessário que a série seja convergente para aproximar bem uma dada função. O matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912) foi um dos grandes nomes nessa teoria e aplicou-a no estudo da mecânica celeste e no problema de muitos corpos. A definição abaixo é conhecida como expansão assintótica de Poincaré, e funciona como uma expansão de Taylor que produz aproximações sucessivas de funções [102–110].

**Definição 4.2.3.** *Considere uma função  $f(z) \in \mathcal{O}(S)$ , onde  $\mathcal{O}(S)$  representa o conjunto das funções holomórficas sobre o setor  $S$ , e a série de potência formal  $\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ . Dizemos que  $\hat{u}$  é uma expansão assintótica de  $f$  sobre o setor  $S$  se para todo sub-setor  $S' \subset S$  e todo  $N \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n \right| \leq C |z|^N, \quad (4.21)$$

para todo  $z \in S'$ .

### 4.2.1 K-Somabilidade

Assim como há diversos métodos de modo a um ser mais potente que o outro, somas como a de Césaró, e como veremos posteriormente a de Borel, admitem uma generalização. No caso da soma de Césaró há toda uma família de somas  $(C, k)$ , ou no caso de Abel  $(A, k)$ , onde  $K \geq 1$  representa o rank da soma. Toda essa construção é conhecida como k-somabilidade [111].

No caso da soma de Borel, a ideia das expansões assintóticas é de vital importância. Este método possui grande aplicação na solução de equações diferenciais e é descrito em termos de uma transformada de Laplace. Por isso também é conhecida como somabilidade de Borel-Laplace [112].

Existe no conjunto  $\mathbb{C}[[z]]$  um subconjunto denominado de séries de Gevrey que é definido como:

**Definição 4.2.4.** *Para  $k > 0$ , a série  $\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  pertence a  $\mathbb{C}[[z]]_{\frac{1}{k}}$ , denominada de séries de potência formal de Gevrey de ordem  $\frac{1}{k}$ , se existirem constantes positivas  $C$  e*

$K$  tais que para qualquer  $n$ , tem-se

$$|u_n| \leq CK^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right). \quad (4.22)$$

Para o caso em que  $k \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{k} = 0$ , a série de Gevrey corresponde a uma série convergente usual. Em geral para  $\frac{1}{k} > 0$  as séries são divergentes. No início do século XX foi descoberto que o conjunto  $\mathbb{C}[[z]]_{\frac{1}{k}}$  está notavelmente onipresente na análise complexa [113].

As séries de Gevrey possuem uma grande variedade de propriedades inclusive a possibilidade de serem somáveis em setores do plano complexo. Estes objetos constituem o ponto inicial da teoria da  $k$ -somabilidade, surgindo como soluções de equação diferenciais lineares e não-lineares, como é o caso da equação de Euler,  $y' + y = 1/x$ , cuja solução é regularizada a partir de séries divergentes. A série hipergeométrica, como será visto na seção posterior, é uma série de Gevrey de ordem  $1/(q-p)$ . Assim como é possível definir uma expansão assintótica a partir das séries formais usuais, há uma definição associada às séries de Gevrey denominada de expansão assintótica de Gevrey de ordem  $k$  [114].

**Definição 4.2.5.** *Seja  $k > 0$ ,  $\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]_{\frac{1}{k}}$  e  $u(z) \in \mathcal{O}(S)$ . Dizemos que  $u(z)$  é a expansão assintótica de  $\hat{u}(z)$ ,  $u(z) \cong_k \hat{u}(z)$ , em  $S$ . Se para qualquer subsector  $S'$  de  $S$  existirem constantes positivas  $C$  e  $K$  que para qualquer  $N$ , tem-se*

$$\left| u(z) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n \right| \leq CK^N |z|^N \Gamma\left(1 + \frac{N}{k}\right) \quad z \in S'. \quad (4.23)$$

**Definição 4.2.6.** *Seja  $k > 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$  e  $\hat{u}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{\frac{1}{k}}$ . Dizemos que  $\hat{u}(z)$  é  $k$ -somável na direção  $d$  ou somável à Borel se existir um setor  $S = S(d, \beta, \rho)$  com  $\beta > \pi/k$  e  $u(z) \in \mathcal{O}(S)$  para o qual  $u(z) \cong_k \hat{u}(z)$  é verdade em  $S$ . Neste caso,  $u(z)$  é denominada de soma de Borel de  $\hat{u}(z)$ .*

Quando  $\beta \leq \pi/k$  existem infinitos  $u$ 's que satisfazem a expansão assintótica de Gevrey em um setor com  $d$  qualquer e algum  $\rho > 0$ . Porém, no caso em que  $\beta > \pi/k$ , a soma de Borel nem sempre existirá, mas caso exista ela é única, de modo que esta soma é bem definida, assim como a caracterização de  $k$ -somabilidade para uma série divergente [115]. Uma dada soma de regularização  $(S_k)$  pode ser vista como uma aplicação sobre o conjunto

das séries  $k$ -somáveis, e esta por sua vez é linear sobre a soma e o produto,

$$\begin{aligned} S_k(\hat{f} + \hat{g}) &= S_k(\hat{f}) + S_k(\hat{g}) \\ S_k(\hat{f}\hat{g}) &= S_k(\hat{f})S_k(\hat{g}), \end{aligned} \tag{4.24}$$

e com relação à diferenciação e integração, temos,

$$\begin{aligned} S_k(\hat{f}') &= \frac{d}{dz} S_k(\hat{f}) \\ S_k\left(\int_0^z \hat{f}(w)dw\right) &= \int_0^z S_k(\hat{f})(w)dw, \end{aligned} \tag{4.25}$$

de modo que este conjunto munido desta aplicação forma uma álgebra diferencial sobre  $\mathbb{C}$ , o que produz muitas propriedades para manipulação e demonstração de teoremas envolvendo estes objetos [115].

## 4.3 Soma de Borel para a função hipergeométrica generalizada

### 4.3.1 Soma de Borel

Finalmente será possível descrever em que contexto existe a soma de Borel. Consideremos  $k > 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$  e  $\hat{u}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{\frac{1}{k}}$ . As assertivas abaixo são equivalentes [52, 53, 115–117, 119, 122]:

- $\hat{u}(z)$  é  $k$ -somável.
- Seja  $h(\xi)$  a transformada  $k$ -Borel formal de  $\hat{u}(z)$

$$h(\xi) = (\mathcal{B}_k \hat{u})(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{\Gamma(1 + n/k)} \xi^n, \tag{4.26}$$

que é holomorfa em uma vizinhança da origem. A função  $h(\xi)$  pode ser continuada analiticamente para um setor infinito  $S(d, \xi, \infty)$  e possui um crescimento exponencial de ordem  $k$ , ou seja, existem constantes  $A, K > 0$  tais que

$$|h(\xi)| \leq K e^{A|\xi|}. \tag{4.27}$$

A condição de crescimento exponencial é essencial para existência da soma de Borel pois é preciso definir a transformada de Laplace da função  $h(\xi)$ :

$$u(z) = (\mathcal{L}h)(z) = \frac{1}{z^k} \int_0^{\infty(d)} e^{-(\xi/z)^k} h(\xi) d(\xi^k), \quad (4.28)$$

onde  $z \in S(d, \beta, \rho)$  com  $\beta < \pi/k$  e  $\rho > 0$ . A função  $u(z)$  é chamada de soma de Borel de  $\hat{u}(z)$ . Considerando  $j \geq 2$  e  $k_1 > 0, \dots, k_j > 0$  satisfazendo  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_j}$ , a transformada iterada de Borel é dada por

$$H(\xi) = (\mathcal{B}_{k_1} \circ \dots \circ \mathcal{B}_{k_j} \hat{u})(\xi), \quad (4.29)$$

e sua respectiva soma de Borel é dada pelas integrais de Laplace iteradas,

$$u(z) = (\mathcal{L}_{k_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{k_j} H)(z). \quad (4.30)$$

### 4.3.2 Regularização de ${}_qF_{p-1}$

Como foi estudado no capítulo anterior a série  ${}_qF_{p-1}$  forma um conjunto de soluções para a equação diferencial hipergeométrica generalizada. Para  $q > p$  a série é divergente e não temos uma função. Agora é possível pensar no objeto

$$\hat{f}(z) = {}_qF_{p-1} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} ; z \right], \quad (4.31)$$

como uma série formal que possui uma conexão com a equação 3.52. A série formal 4.31 pertence à classe de Gevrey e admite ser regularizada via soma de Borel, o que é descrito no teorema a seguir [53]:

**Teorema 4.3.1.** *Assumindo que  $a_i - a_j \notin \mathbb{Z}$  ( $i \neq j$ ). Então  $\hat{f}(z)$  é  $\frac{1}{q-p}$ -somável em qualquer direção  $d$  tal que  $d \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$  e sua soma de Borel  $f(z)$  é dada por,*

$$f(z) = C_{ab} \sum_{j=1}^q C_{ab}(j) (-z)^{a_j} {}_pF_{q-1} \left[ \begin{matrix} a_j, 1 + a_j - \mathbf{b} \\ 1 + a_j - \hat{\mathbf{a}}_j \end{matrix} ; \frac{(-1)^{p-q}}{z} \right], \quad (4.32)$$

onde  $z \in S(\pi, (q - p + 2)\pi, \infty)$  e

$$C_{ab} = \frac{\Gamma(\mathbf{b})}{\Gamma(\mathbf{a})} \quad C_{ab}(j) = \frac{\Gamma(a_j)\Gamma(\hat{\mathbf{a}}_j - a_j)}{\Gamma(\mathbf{b} - a_j)}. \quad (4.33)$$

Como já foi definido na seção anterior,  $\Gamma(\mathbf{a}) = \prod_{i=1}^q \Gamma(a_i)$ ,  $\Gamma(\hat{\mathbf{a}}_j - a_j) = \prod_{i=1, i \neq j}^q \Gamma(a_i - a_j)$  e  $\hat{\mathbf{a}}_j$  é  $\mathbf{a}$  omitindo-se a  $j$ -ésima componente.

*Demonstração.* O primeiro passo é aplicar a transformada 1-Borel  $(q - p)$  vezes à série formal,

$${}_qF_{p-1} \Rightarrow \hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.34)$$

Aplicando  $\hat{B}_1$  uma vez, obtêm-se

$$(\hat{B}_1 \hat{f})(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n} \frac{1}{n!} \frac{\xi^n}{n!}, \quad (4.35)$$

de modo que,

$$\begin{aligned} h(\xi) = \left( (\hat{B}_1)^{q-p} \hat{f} \right) (\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n} \frac{1}{n!} \frac{\xi^n}{(n!)^{q-p}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n [(1)_n]^{q-p}} \frac{\xi^n}{n!}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Note que  $h(\xi)$  corresponde a uma série hipergeométrica, mas agora com  $q - 1$  termos no denominador,

$$h(\xi) = {}_qF_{q-1} \left[ \begin{matrix} a_j, 1 + a_j - b \\ 1 + a_j - \hat{a}_j \end{matrix} ; \xi \right]. \quad (4.37)$$

A função  $h(\xi)$  é holomorfa no conjunto  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$  e é de ordem exponencial. Logo, é possível escrever a soma de Borel de  $f(z)$  a partir das integrais de Laplace iteradas,

$$f(z) = (\mathcal{L}_1^{q-p} h)(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s_1}{z}} dS_1 \frac{1}{S_1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s_2}{S_1}} dS_2 \dots \frac{1}{S_{q-p-1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi}{S_{q-p-1}}} h(\xi) d\xi, \quad (4.38)$$

usando as substituições  $S_1 = zu_1$ ,  $S_2 = S_1u_2$ ,  $S_3 = S_2u_3$ , ... e  $\xi = S_{q-p-1}u_{q-p}$ ,

$$f(z) \int_0^\infty e^{-u_1} du_1 \int_0^\infty e^{-u_2} du_2 \dots \int_0^\infty e^{-u_{q-p}} h(u_1 \dots u_{q-p} z) du_{q-p}. \quad (4.39)$$

Fazendo uso da representação de Barnes (3.64) para  $h(u_1 \dots u_{q-p} z)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{C_{ab}}{2\pi i} \int_I \frac{\Gamma(\mathbf{a} + S)\Gamma(-S)}{\Gamma(\mathbf{b} + S)[\Gamma(1 + S)]^{q-p}} (-z)^S \int_0^\infty e^{-u_1} u_1^S du_1 \dots \int_0^\infty e^{-u_{q-p}} u_{q-p}^S du_{q-p} dS \\ &= \frac{C_{ab}}{2\pi i} \int_I \frac{\Gamma(\mathbf{a} + S)\Gamma(-S)[\Gamma(1 + S)]^{q-p}}{\Gamma(\mathbf{b} + S)[\Gamma(1 + S)]^{q-p}} (-z)^S dS \\ f(z) &= \frac{C_{ab}}{2\pi i} \int_I \frac{\Gamma(\mathbf{a} + S)\Gamma(-S)}{\Gamma(\mathbf{b} + S)} (-z)^S dS. \end{aligned} \quad (4.40)$$

O caminho  $I$  vai de  $-i\infty$  a  $i\infty$  (4.1) de modo que os zeros da função  $\Gamma(\mathbf{a} + S)$  ficam à esquerda. Usando o teorema dos resíduos a integral acima é dada por,

$$f(z) = C_{ab} \sum_{j=1}^q \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{a}}_j - a_j - n) \Gamma(a_j + n)}{\Gamma(\mathbf{b} - a_j - n)} \frac{(-1)^n}{n!} (-z)^{-a_j - n}. \quad (4.41)$$

Através da fórmula de reflexão de Euler,  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ , é possível mostrar que,

$$\frac{1}{\Gamma(c-n)} = \frac{(1-c)_n (-1)^n}{\Gamma(c)}, \quad (4.42)$$

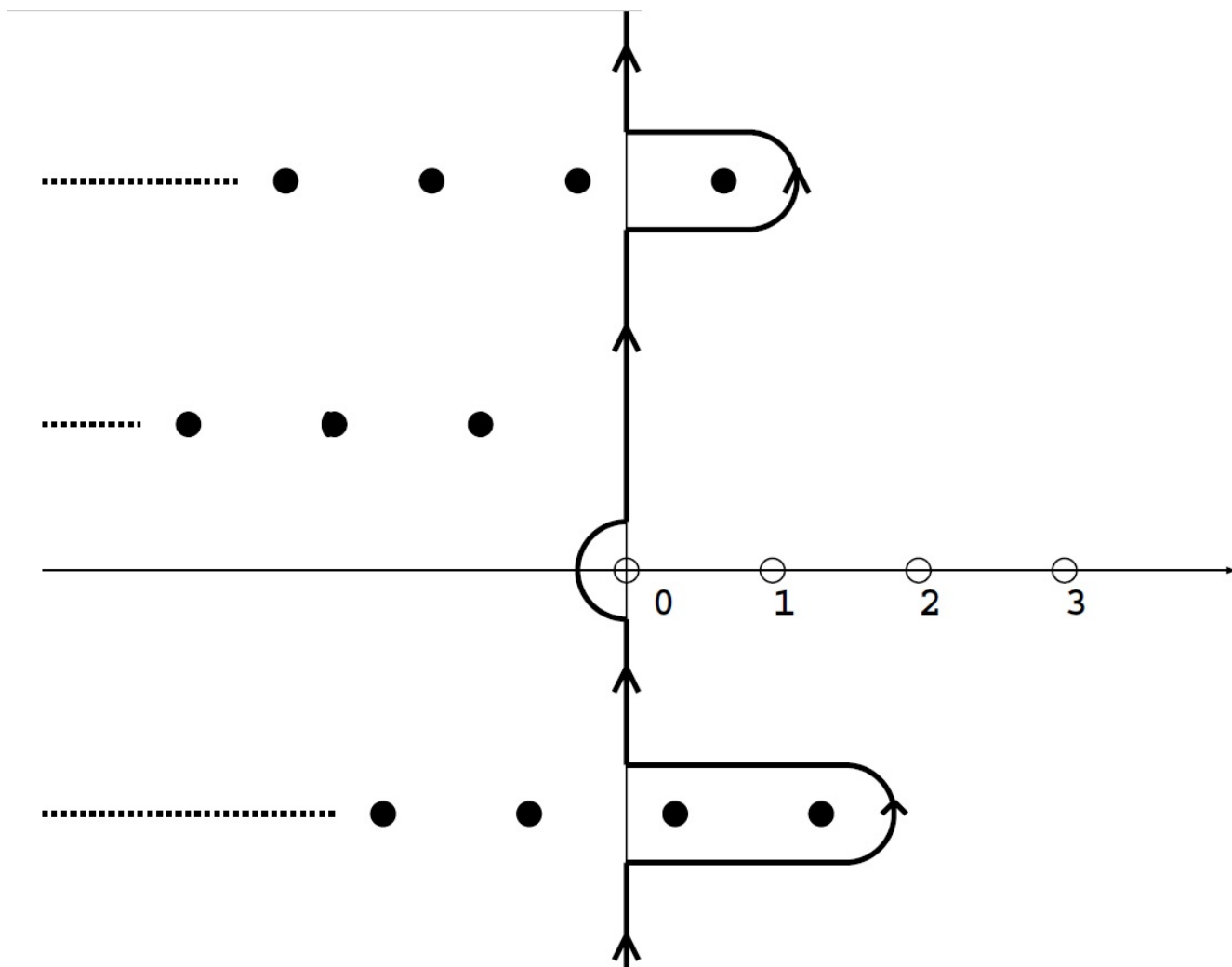
usando esta relação nos termos  $\Gamma(\hat{\mathbf{a}}_j - a_j - n)$  e  $\Gamma(\mathbf{b} - a_j - n)$ , obtêm-se,

$$\begin{aligned} f(z) &= C_{ab} \sum_{j=1}^q \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{a}}_j - a_j) \Gamma(a_j + n)}{(1 + a_j - \hat{\mathbf{a}}_j)_n (-1)^{nq}} \frac{(1 + a_j - \mathbf{b})_n (-1)^{n(p-1)}}{\Gamma(\mathbf{b} - a_j)} \frac{(-1)^n}{n!} (-z)^{-a_j - n} \\ &= C_{ab} \sum_{j=1}^q C_{ab}(j) (-z)^{-a_j} \sum_{n=0}^\infty \frac{(a_j)_n (1 + a_j - \mathbf{b})_n (-1)^{(p-q)n}}{(1 + a_j - \hat{\mathbf{a}}_j)_n n!} (-z)^{-n}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

o somatório em  $n$  é uma função hipergeométrica, de modo que podemos finalmente escrever:

$$f(z) = C_{ab} \sum_{j=1}^q C_{ab}(j) (-z)^{a_j} {}_pF_{q-1} \left[ \begin{matrix} a_j, 1 + a_j - \mathbf{b} \\ 1 + a_j - \hat{\mathbf{a}}_j \end{matrix}; \frac{(-1)^{p-q}}{z} \right]. \quad (4.44)$$

□



**Figura 4.1:** Representação do caminho  $I$  no plano complexo. Os zeros da função  $\Gamma(\mathbf{a}+S)$  ficam à esquerda de  $I$ , e os zeros da função  $\Gamma(-S)$  ficam à direita.

# Capítulo 5

## Distribuição de Lévy $\alpha$ -estável simétrica para $\alpha = \frac{2}{M}$

*“O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder entusiasmo.”*

---

Winston Churchill

### 5.1 Considerações iniciais

Neste capítulo serão mostrados os primeiros resultados obtidos neste trabalho. A primeira parte consiste em dois teoremas que descrevem a distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica com parâmetro  $\alpha = \frac{2}{M}$ , com  $M$  sendo um inteiro positivo, em termos de funções hipergeométricas.

O método desenvolvido aqui pode ser dividido em duas partes. O primeiro passo consiste em expandir o integrando da distribuição de Lévy, com parâmetros  $\alpha = \frac{2}{M}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$ , dada em termos da transformada cosseno de Fourier,

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos(xt) dt. \quad (5.1)$$

em uma série de potências e então integrá-la termo a termo. De modo que obtemos uma expressão, que deve ser analisada do ponto de vista da representação de séries de



potência formal, descritas na seção 4.2, (ao contrário da usual convergência analítica), para a distribuição  $P_M(x)$ . Como foi analisado no capítulo 3, as funções hipergeométricas possuem um alto grau de simetrias e associações com um imenso número de funções. Além disso, há na literatura diversas conexões entre a função Gama e o comportamento assintótico das distribuições de Lévy. Portanto, nós tentamos identificar e escrever nossa expressão para  $P_M(x)$  em termos destas funções.

O próximo passo, nos casos em que as funções hipergeométricas são divergentes, faremos uso do procedimento geral de regularização via soma de Borel descrito na seção 4.3, construindo finalmente nossa expressão exata para  $P_M(x)$  como uma soma finita de funções hipergeométricas.

## 5.2 Fórmula para distribuição de Lévy estável simétrica com $\alpha = \frac{2}{M}$ ( $M$ inteiro)

Nesta seção será demonstrado o método descrito acima, e este, por sua vez, se configura nos seguintes teoremas [118].

**Teorema 5.2.1.** *Seja  $P_\alpha(x)$  a distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável com parâmetros de assimetria  $\beta = 0$ , média  $\mu = 0$  e de escala  $c = 1$ . Sendo  $\alpha = \frac{2}{M}$  onde  $M$  é um inteiro positivo, temos então,*

$$P_M(x) = \Gamma\left(\frac{M}{2}\right) \frac{M}{2\pi} {}_{M-1}F_0 \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \text{---} \end{matrix} ; -\frac{M^M}{4}x^2 \right], \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{M-1})$  e

$$a_i = \frac{2+M}{2M} + \frac{i-1}{M}. \quad (5.3)$$

*Demonstração.* A distribuição de Lévy Estável Simétrica, com as propriedades descritas acima, pode ser escrita em termos de uma transformada cosseno de Fourier de sua função característica 5.1. Nosso objetivo é mostrar que esta pode ser expressa em termos de uma função hipergeométrica. Para este fim, inicialmente expandimos o cosseno da equação 5.1

em séries de Taylor,

$$\begin{aligned} P_\alpha(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (xt)^{2n}}{(2n)!} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} t^{2n} dt, \end{aligned} \quad (5.4)$$

fazendo a substituição  $u = t^\alpha$ ,

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{2n+1}{\alpha}-1} du, \quad (5.5)$$

e usando a definição da função Gama (equação 3.25),

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \Gamma\left[\frac{2n+1}{\alpha}\right]. \quad (5.6)$$

Fazendo a substituição  $\alpha = \frac{2}{M}$ , temos,

$$P_M(x) = \frac{M}{2\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma[(1/2+n)M]}{(2n)!} x^{2n}. \quad (5.7)$$

A razão entre os termos  $n+1$  e  $n$  é dada por

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{M}{4} \frac{\Gamma[(3/2+n)M]}{\Gamma[1+(1/2+n)M]} \frac{x^2}{(n+1)}. \quad (5.8)$$

Como já foi mencionando anteriormente, é possível expressar a razão entre funções Gama como um símbolo de Pochhammer  $\Gamma[x+n]/\Gamma[x] = (x)_n$ . Então, subtraindo os argumentos das funções Gama,

$$(3/2+n)M - 1 - (1/2+n)M = M - 1, \quad (5.9)$$

e escrevendo  $X = 1 + (1/2+n)M$ , temos que

$$\frac{\Gamma[(3/2+n)M]}{\Gamma[1+(1/2+n)M]} = \frac{\Gamma[X+M-1]}{\Gamma[X]} = (X)_{M-1}, \quad (5.10)$$

podemos expandir o símbolo de Pochhammer e fatorizar  $M$  de modo a obter

$$\begin{aligned} (X)_{M-1} &= M^{M-1} ((2+M)/(2M) + n) ((2+M)/(2M) + 1/M + n) \\ &\quad \times ((2+M)/(2M) + 2/M + n) \\ &\quad \times \dots \times ((2+M)/(2M) + (M-2)/M + n). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Então, nós escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= -((2+M)/(2M) + n) \\ &\quad \times \dots \times ((2+M)/(2M) + (M-2)/M + n) \frac{M^M}{4} \frac{x^2}{(n+1)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Observe que a razão  $c_{n+1}/c_n$  é típica de uma função hipergeométrica 3.55, composta somente de termos  $a_n$  (tal que  $q = 0$ ) dado por

$$a_n = \frac{2+M}{2M} + \frac{n-1}{M} = \frac{1}{2} + \frac{n}{M}. \quad (5.13)$$

Para completar nossa prova, nós multiplicamos toda a função por  $c_0 = \Gamma[M/2]M/2$ , extraído de 5.7.  $\square$

Nós devemos observar o quão notável é matematicamente o fato de que um conjunto infinito de distribuições  $\alpha$ -estáveis possa ser dado de forma tão compacta, isto é, como uma simples FHG. Como um simples teste para o resultado acima, vamos considerar os casos especiais  $M = 1$  e  $M = 2$ . Lembrando que  $\Gamma[1/2] = \sqrt{\pi}$  e

$${}_0F_0 \left[ \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} ; z \right] = \exp[z], \quad {}_1F_0 \left[ \begin{matrix} a_1 \\ - \end{matrix} ; z \right] = (1-z)^{-a_1}, \quad (5.14)$$

nós temos que

$$P_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right], \quad P_2(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}, \quad (5.15)$$

que representa, respectivamente, as distribuições Gaussiana ( $\alpha = 2$ ) e de Cauchy ( $\alpha = 1$ ), como esperado.

Para  $M \geq 3$ ,  $P_M(x)$  é dada pela equação 5.2 em termos de uma função hipergeométrica com  $p = M - 1 > q + 1 = 1$ , cujo raio de convergência, como foi demonstrado na seção 3.2.1, é zero. Então, a representação em séries não converge, exceto trivialmente na

origem. De modo que, exceto para os casos já conhecidos na literatura, nossa expressão até o presente momento só pode ser vista como uma série de potência formal, o que não é útil na prática. Mas como já foi analisado, nossa expressão pertence à classe das séries de Gevrey (seção 4.2.1) e é possível regularizá-la por meio da soma de Borel. Deste modo, finalmente é possível escrever uma expressão analítica dada a partir do seguinte teorema.

**Teorema 5.2.2.** *A distribuição  $\alpha$ -estável simétrica ( $\beta = 0$ ) com  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ , e  $\alpha = 2/M$  ( $M = 3, 4, \dots$ ), é dada exatamente pela seguinte expressão (convergente em todo lugar)*

$$P_M(x) = \Gamma\left[\frac{M}{2}\right] \frac{M}{2\pi} \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{M-1} \Gamma\left[d_j - \frac{1}{2}\right] \frac{C_j}{(M^M x^2/4)^{\frac{1}{2} + \frac{j}{M}}} \times {}_1F_{M-2} \left[ \begin{matrix} (d_j - 1/2) \\ \mathbf{c}^{(j)} \end{matrix} ; \frac{4(-1)^{M-1}}{M^M x^2} \right], \quad (5.16)$$

onde  $C = \prod_{i=1}^{M-1} \Gamma[d_i - 1/2]$ ,  $C_j = \prod_{i=1, i \neq j}^{M-1} \Gamma[d_i - d_j]$ ,  $d_j = 1 + j/M$ , e

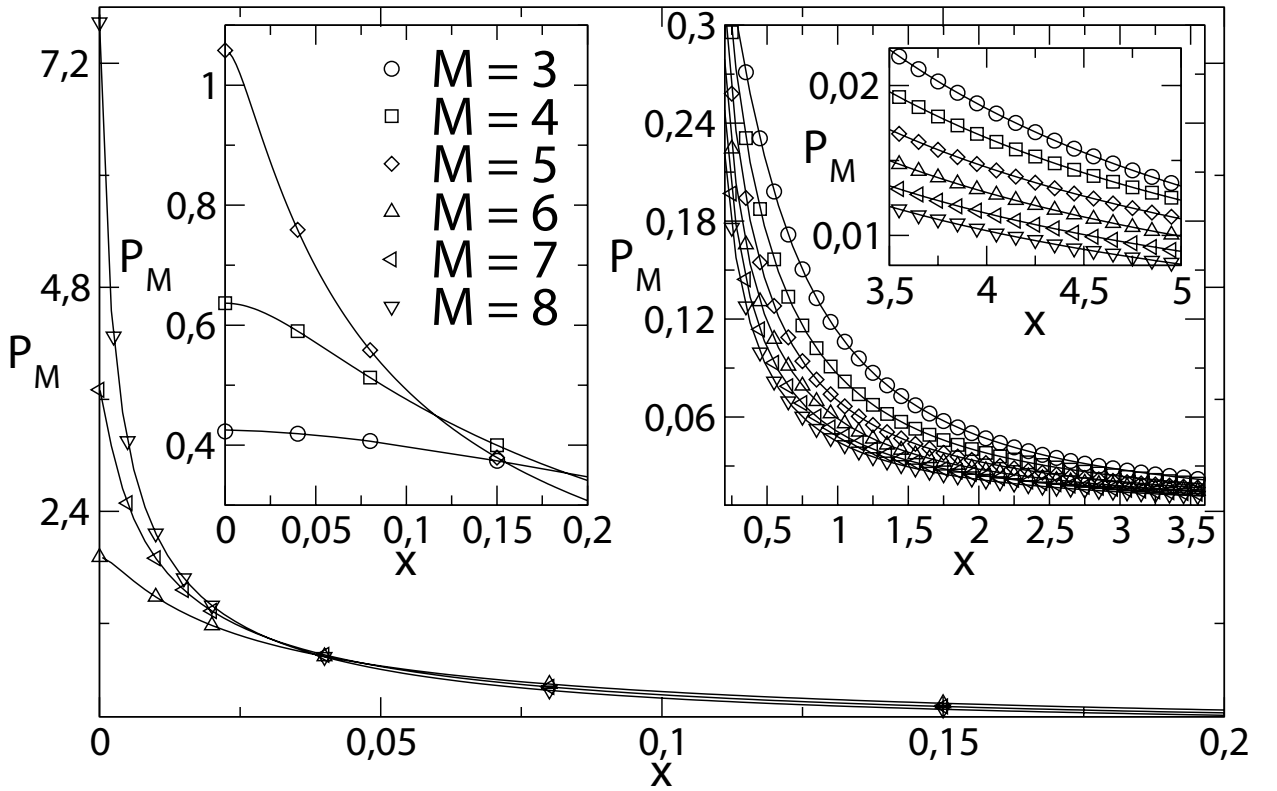
$$\mathbf{c}^{(j)} = \left( d_j - \frac{1}{M}, d_j - \frac{2}{M}, \dots, d_j - \frac{(j-1)}{M}, d_j - \frac{(j+1)}{M}, \right. \\ \left. d_j - \frac{(j+2)}{M}, \dots, d_j - \frac{(M-1)}{M} \right). \quad (5.17)$$

*Demonstração.* Os resultados acima são obtidos aplicando-se o teorema 4.3.1 à nossa série (eq. 5.2). □

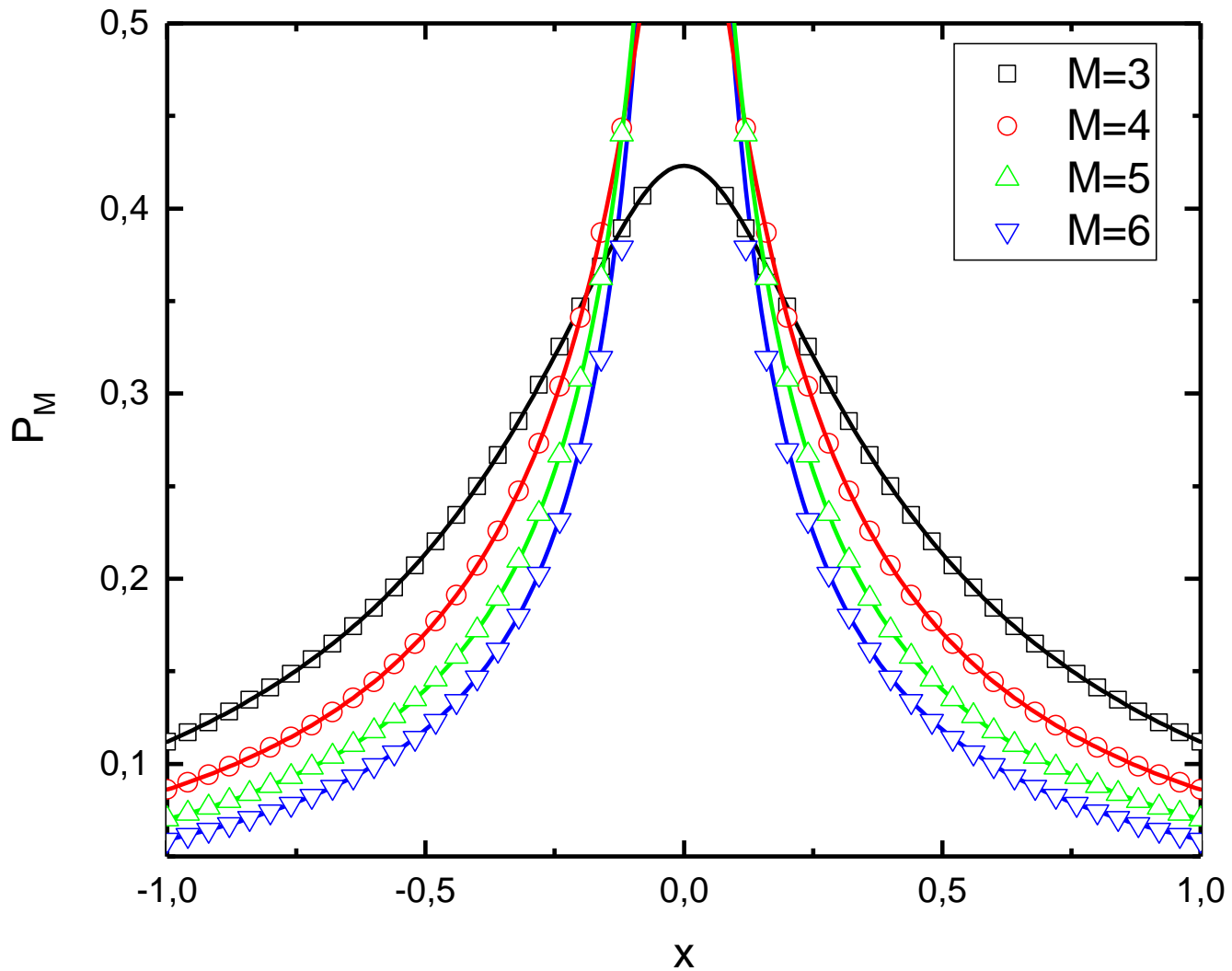
Como foi discutido no capítulo 4, os procedimentos de somas de regularização tem como alvo contornar a divergência de séries de potência formais, mantendo ainda sua estrutura algébrica original. Portanto, a equação 5.16 é certamente a solução analítica exata da equação 5.1. A distribuição  $P_M(x)$  agora é dada em termos de  $(M-1)$  funções hipergeométricas  ${}_1F_{M-1}$ , que por sua vez é convergente em todo lugar da reta real. Além disso, como a equação 5.16 depende somente de  $x^2$ , a relação de simetria  $P_M(x) = P_M(-x)$  é naturalmente assegurada (ver figura 5.2), como esperado no caso de  $\beta = 0$ .

Como uma ilustração dos resultados acima, mostramos na figura 5.1 um cálculo numérico das equações 5.1 e 5.16 para seis valores diferentes de  $M$ . A concordância é (aproximadamente) perfeita (claro que, até a precisão numérica intrínseca do algoritmo

que gera as funções hipergeométricas). Note também que devido ao argumento destas últimas na Eq. (5.16) serem da forma  $z = 1/x^2$ , quer seja para fins analíticos ou numéricos, as aproximações de  $P_M(x)$ , para  $x$  pequeno ou  $x$  grande, podem ser obtidas a partir de expansões (séries) assintóticas de  ${}_1F_{M-1}$  [40, 75, 89, 90, 123].



**Figura 5.1:** A distribuição de Lévy  $P_M(x)$  obtida através de cálculos numéricos na integral da Eq. (5.1) (símbolos) e o resultado analítico da Eq. (5.16) (curva contínua), para seis valores de  $M$  e  $x \geq 0$  (lembrando que  $P_M(x)$  é uma função simétrica de  $x$  para o caso de  $\beta = 0$ ). A concordância é excelente para qualquer valor de  $x$  no intervalo.



**Figura 5.2:** A distribuição de Lévy  $P_M(x)$  obtida a partir de cálculos numéricos conjuntamente com o resultado analítico para  $M = 3, 4, 5$  e  $6$ , para  $x \in (-1, 1)$ . Note que as distribuições são simétricas, como esperado para  $\beta = 0$ . Esta simetria está associada ao argumento da função hipergeométrica que possui paridade par e ao fator  $x^2$  que multiplica esta última.

# Aproximação para as distribuições estáveis simétricas

*“Não há assunto tão velho que não possa ser dito algo novo sobre ele.”*

---

Fiódor Dostoiévski

## 6.1 Conceitos preliminares

Nesta capítulo abordaremos nosso segundo resultado que consiste em descrever a distribuição de Lévy, para um conjunto maior dos valores do parâmetro  $\alpha$ , através de uma aproximação em série [120].

No capítulo anterior, através da expansão do cosseno na equação 5.1, foi possível mostrar que as distribuições estáveis simétricas admitem uma representação em termos de funções hipergeométricas se  $\alpha = 2/M$ . Nosso objetivo agora é construir uma expressão que represente estas funções, de forma aproximada, para os outros valores possíveis de  $\alpha$ . O ponto de partida é expandir, ao invés do cosseno, a função exponencial e assim resolver integrais cujos termos serão da forma  $(t - t_0)^m \cos[xt]$ . O problema propriamente posto é escolher o número de termos e o centro da expansão que produzam o melhor controle do erro numérico. Certamente, uma escolha única de  $t_0$  para qualquer  $x$  e  $\alpha$  não produzirá bons resultados, visto que o erro cresce à medida que nos afastamos do centro.



A ideia proposta consiste em dividir o domínio da variável de integração em regiões, que denominaremos de janelas, e construir as expansões no interior destes subintervalos.

O conjunto de subintervalos escolhido é da forma  $\mathcal{I}_n = ((\pi/2)(4n - 3)/x, (\pi/2)(4n + 1)/x)$  (para  $n = 1, 2, \dots$ ), de modo que  $\cos[xt]$  é uma função ímpar com relação ao centro (em  $t_n = (\pi/2)(4n - 1)/x$ ) e igual a zero nos extremos de  $\mathcal{I}_n$ . Desta forma, o intervalo de integração é dividido em janelas, onde a primeira é  $(0, (\pi/2)/x)$  e as subsequentes são descritas pelos  $\mathcal{I}_n$ 's, veja a figura 6.1.

O truque de expandir a exponencial não funciona muito bem para a primeira janela, o cosseno não apresenta o mesmo comportamento das outras regiões, de modo que usaremos um método alternativo para esta. Contudo, para as outras janelas nós devemos desenvolver a ordem da expansão. E como veremos a seguir, até a quinta ordem, que devido à simetria serão 3 termos, já obtemos uma boa aproximação que melhora, é claro, à medida que aumentamos esse número, veja a figura 6.2.

## 6.2 Aproximação em séries para distribuição de Lévy $\alpha$ -estável simétrica

Para construção da nossa série aproximativa o primeiro passo consiste em descrever a primeira janela. Para isso, considere a seguinte função,

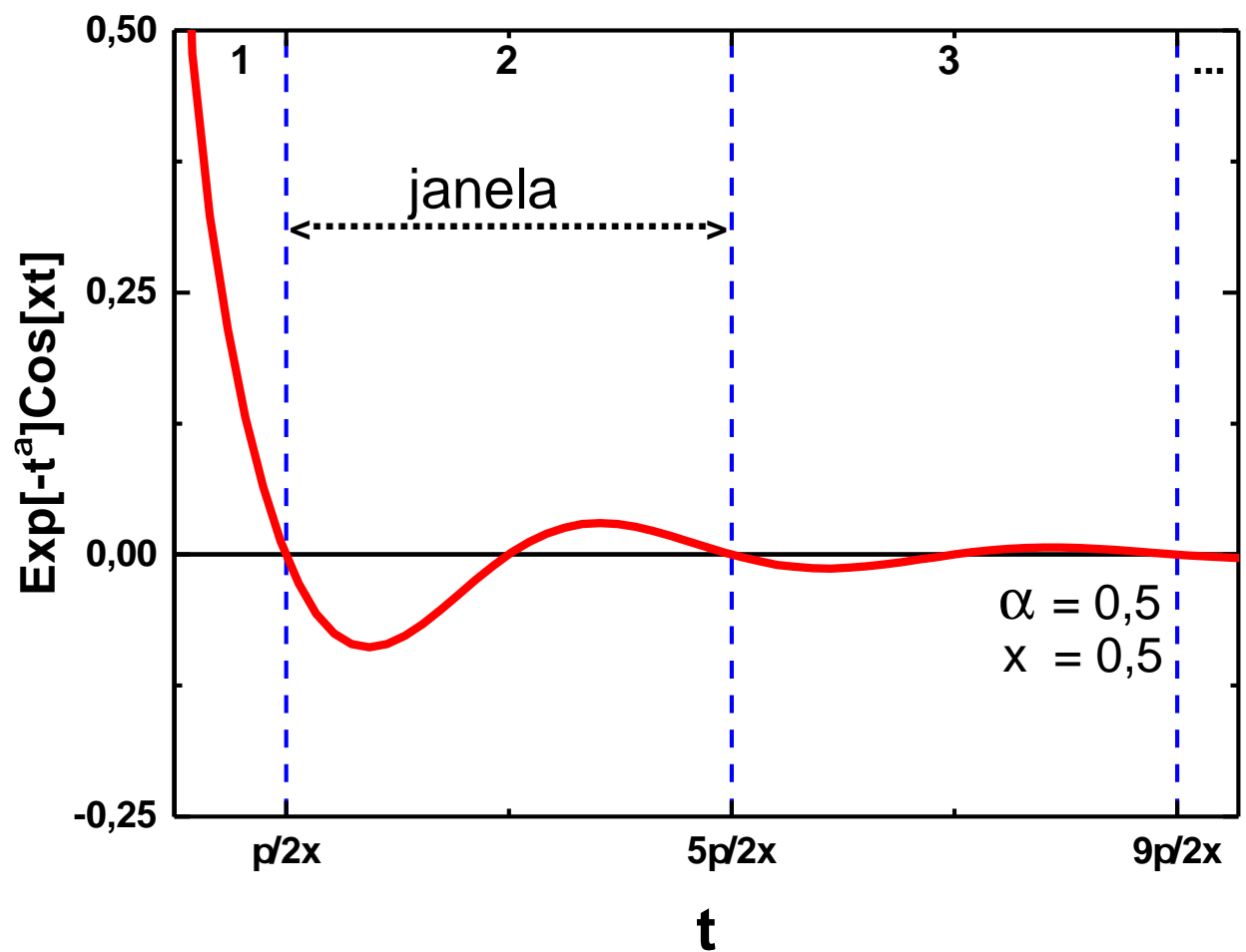
$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2x}} dt \exp[-t^\alpha] \cos[xt] \quad (6.1)$$

fazendo a substituição  $u = t^\alpha$ , obtemos

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha} du \exp[-u] \cos\left[xu^{\frac{1}{\alpha}}\right] u^{\frac{1}{\alpha}-1}. \quad (6.2)$$

Agora, expandindo o cosseno em série de Taylor ao redor de  $t_0 = 0$ , obtém-se

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha} du \exp[-u] u^{\frac{2k+1}{\alpha}-1}. \quad (6.3)$$



**Figura 6.1:** Nós dividimos a integral de Fourier, Eq. (5.1), em janelas não sobrepostas por partes na integração. As linhas tracejadas indicam as bordas das janelas.

A partir da definição da função Gama incompleta inferior,

$$\gamma(s, y) = \int_0^y du \exp[-u] u^{s-1}, \quad (6.4)$$

a equação 6.3 pode ser escrita como  $g_\alpha(x) = S_\infty(x; \alpha)$ , onde

$$S_K(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]. \quad (6.5)$$

Vamos analisar a convergência da série acima. Para isto usaremos o teorema do valor médio generalizado de Cauchy [121] que afirma que,

**Teorema 6.2.1.** *Seja o intervalo  $[a, b] \in \mathbb{R}$  e duas funções,  $f(x)$  e  $g(x)$ , diferenciáveis em  $(a, b)$ . Se para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $(a, b)$  tem-se que  $g'(x) \neq 0$ , então existe pelo menos um  $c$  neste intervalo tal que,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.6)$$

Calculando a derivada da função gama incompleta inferior, temos,

$$\frac{d[\gamma(\alpha, y)]}{dy} = y^{\alpha-1} e^{-y}, \quad (6.7)$$

note que a derivada acima é diferente de zero para qualquer  $c \in (0, b)$ , de modo que, podemos usar o teorema acima do seguinte modo. Considere  $c \in (0, y)$ , e a seguinte razão entre as função gamas,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\alpha, y) - \gamma(\alpha, 0)}{\gamma(\beta, y) - \gamma(\beta, 0)} &= \frac{\gamma(\alpha, y)}{\gamma(\beta, y)} \\ \frac{D_y[\gamma(\alpha, y)](c)}{D_y[\gamma(\beta, y)](c)} &= c^{\alpha-\beta}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para  $\alpha > \beta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\alpha, y)}{\gamma(\beta, y)} &= c^{\alpha-\beta} \leq y^{\alpha-\beta} \\ \frac{\gamma(\alpha, y)}{\gamma(\beta, y)} &\leq y^{\alpha-\beta}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Vamos analisar a convergência da série pelo método do teste da razão, para isto, se faz necessário desenvolver a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{\alpha\pi} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \gamma[(2k+3)/\alpha, (\pi/2x)^\alpha]}{\frac{(-1)^k}{\alpha\pi} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \gamma[(2k+1)/\alpha, (\pi/2x)^\alpha]} \right| \\
 &= x^2 \frac{(2k)!}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} \frac{\gamma\left[\frac{2k+3}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}{\gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]} \\
 &= x^2 \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \frac{\gamma\left[\frac{2k+3}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}{\gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Note que  $\frac{2k+3}{\alpha} > \frac{2k+1}{\alpha}$  para  $\alpha \in (0, 2]$ , de modo que é possível mostrar que,

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma\left[\frac{2k+3}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}{\gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]} &\leq \left[\left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]^{\frac{2k+3}{\alpha} - \frac{2k+1}{\alpha}} = \left[\left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]^{2/\alpha} \\
 \frac{\gamma\left[\frac{2k+3}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}{\gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]} &\leq \frac{\pi^2}{4x^2}. \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da inequação acima pelo termo  $x^2 \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$ , temos que,

$$\begin{aligned}
 x^2 \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \frac{\gamma\left[\frac{2k+3}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]}{\gamma\left[\frac{2k+1}{\alpha}, \left(\frac{\pi}{2x}\right)^\alpha\right]} &\leq x^2 \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \frac{\pi^2}{4x^2} \\
 \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &\leq \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \frac{\pi^2}{4}, \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

calculando o seguinte limite para o lado direito da inequação,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \frac{\pi^2}{4} = 0, \tag{6.13}$$

logo, podemos finalmente concluir que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0, \tag{6.14}$$

ou seja, a série converge para todo  $x$  e  $\alpha \in (0, 2]$ .

A série convergente  $S_\infty$  descreve a integral exatamente na primeira janela. Porém, na prática, alguns termos já reproduzem bons resultados numéricos. Por exemplo, na figura 6.2 é feita a comparação (para  $K = 5$ , ou seja, com um baixo custo computacional) com um cálculo de integração numérica da equação 5.1 no intervalo  $0 \leq t \leq (\pi/2)/x$  (primeira

janela). O erro absoluto é tipicamente da ordem de  $10^{-8}$ .

Na segunda parte, iremos descrever as integrais para os intervalos subsequentes  $\mathcal{I}_n$ . Usando a substituição  $\tau = xt$ , e sendo  $(n = 1, 2, \dots)$

$$I_n(x; \alpha) = \frac{1}{\pi x} \int_{\frac{\pi}{2}(4n-3)}^{\frac{\pi}{2}(4n+1)} d\tau \exp[-\lambda \tau^\alpha] \cos[\tau], \quad (6.15)$$

para

$$\lambda = x^{-\alpha}. \quad (6.16)$$

Considerando a expansão em série de Taylor (truncada até a  $M$ -ésima ordem),

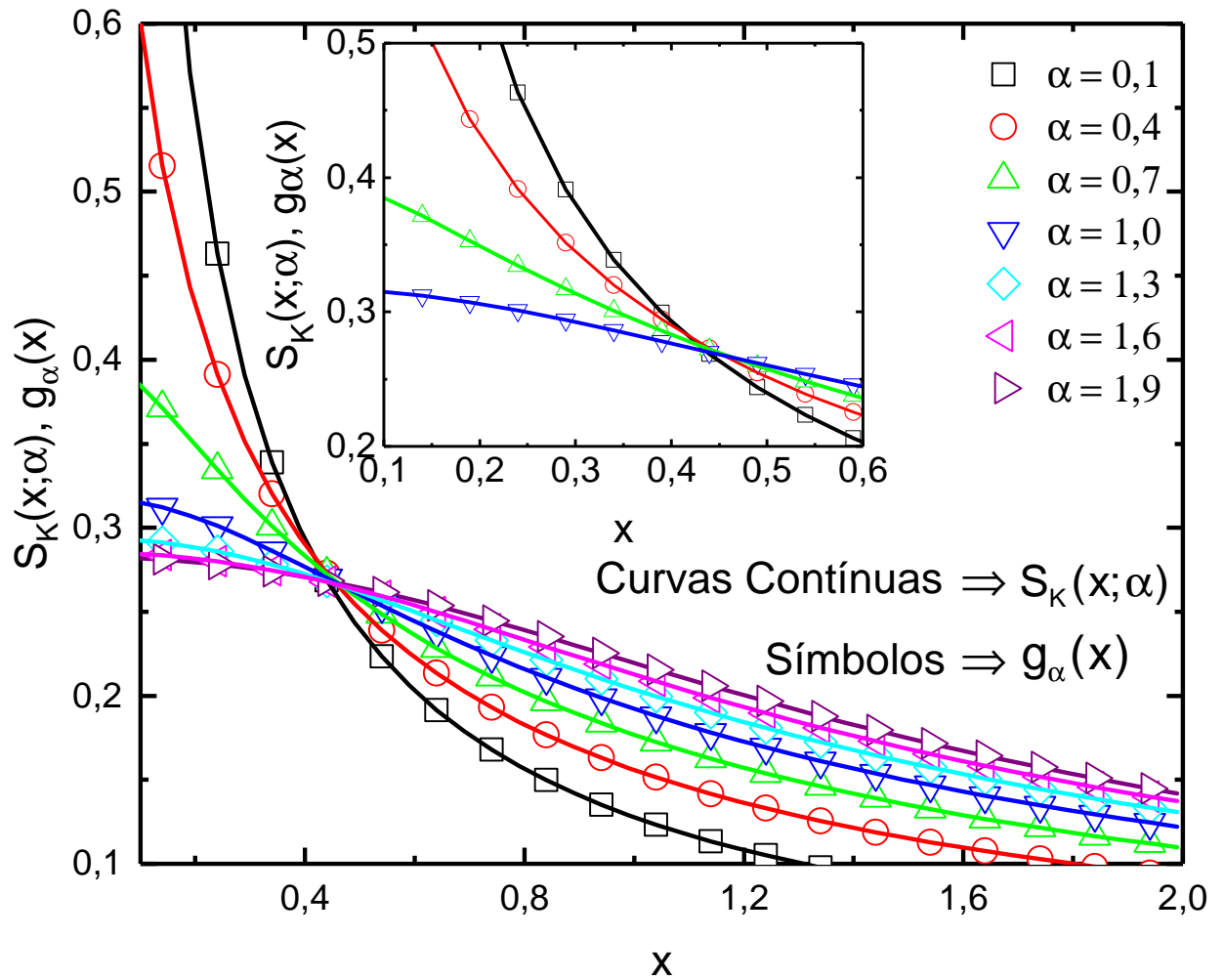
$$\exp[-\lambda \tau^\alpha] \approx \sum_{m=0}^{m=M} c_m(\lambda; \tau_n) (\tau - \tau_n)^m, \quad (6.17)$$

onde,

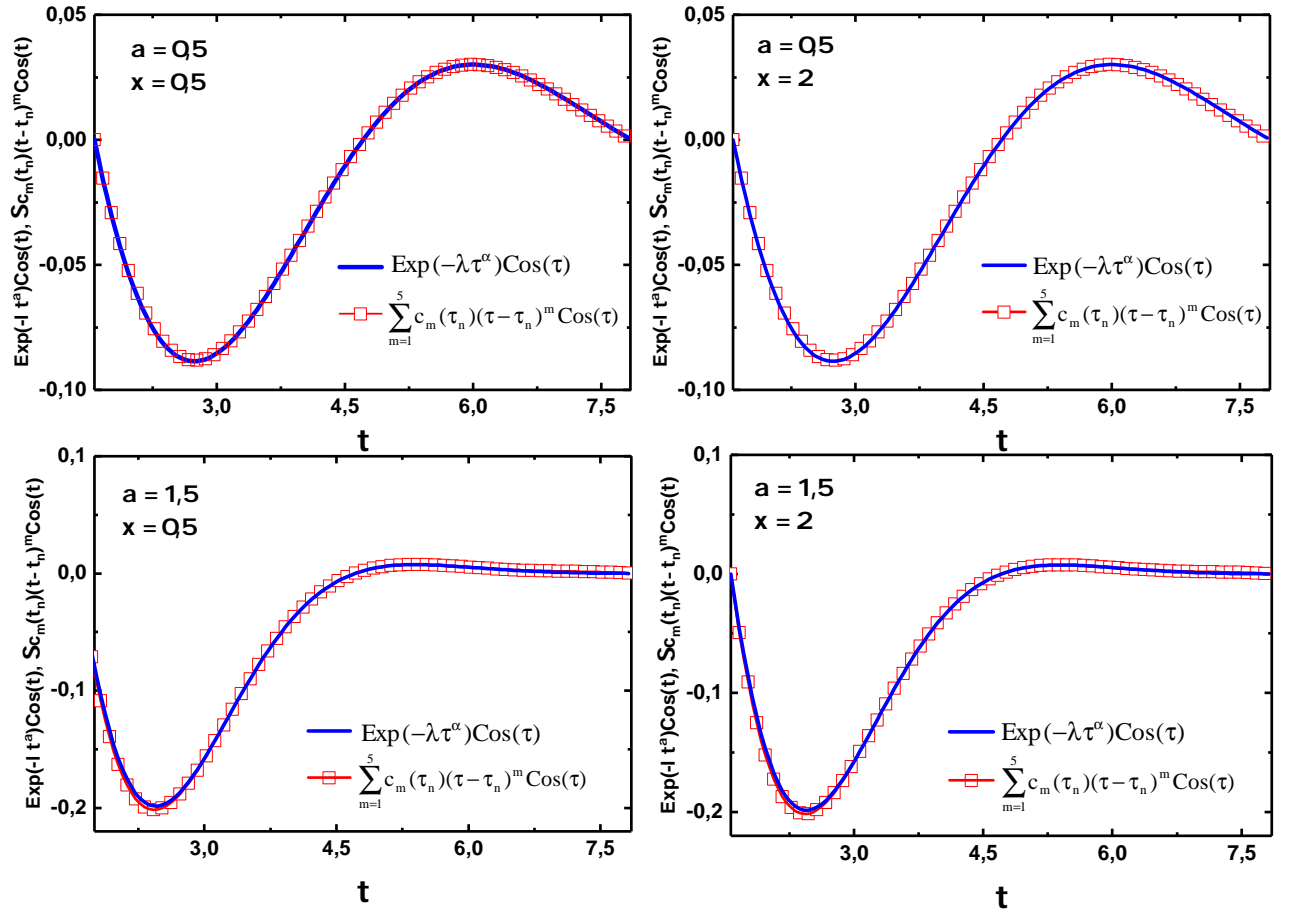
$$\tau_n = x t_n = \frac{\pi}{2}(4n-1) \quad \text{e} \quad c_m(\lambda; \tau_n) = \frac{(d^m/d\tau_n^m) \exp[-\lambda \tau_n^\alpha]}{m!}. \quad (6.18)$$

Então, podemos aproximar

$$I_n(x; \alpha) \approx I_n^{(M)}(x; \alpha) = \frac{1}{\pi x} \sum_{m=1}^{m=M} c_m(\lambda; \tau_n) \int_{\frac{\pi}{2}(4n-3)}^{\frac{\pi}{2}(4n+1)} d\tau (\tau - \tau_n)^m \cos[\tau]. \quad (6.19)$$



**Figura 6.2:** Gráfico de  $S_K(x; \alpha)$ , equação 6.5, para  $K = 5$  (curvas contínuas) e sua transformada de Fourier  $g_\alpha(x)$  calculada na primeira janela (símbolos) para vários valores de  $\alpha$ . O erro absoluto é menor que  $10^{-8}$ .



**Figura 6.3:** Gráficos do integrando da equação 5.1 e sua correspondente expansão até a quinta ordem ( $M = 5$ ) na segunda janela da variável de integração  $t$ , para alguns valores de  $\alpha$  e  $x$ . Em todos estes casos o erro absoluto nunca é maior que  $10^{-3}$ . A terceira, quarta, etc., janelas mostram um comportamento similar.

Devido à paridade do integrando, a integral é não nula somente para  $m$  ímpar. Além disso, temos o resultado exato ( $m$  ímpar)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}(4n-3)}^{\frac{\pi}{2}(4n+1)} d\tau (\tau - \tau_n)^m \cos[\tau] &= 2 \int_0^{\pi} d\tau \tau^m \sin[\tau] \\ &= \frac{2\pi^{2+m}}{2+m} {}_1F_2 \left[ \begin{matrix} 1 + \frac{m}{2} \\ \frac{3}{2}, 2 + \frac{m}{2} \end{matrix} ; -\frac{\pi^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (6.20)$$

O termo  ${}_1F_2 \left[ \begin{matrix} a \\ b, c \end{matrix} ; z \right]$  é uma função hipergeométrica. Note que o termo  ${}_1F_2$  gera valores numéricos sem dependência com  $x$  ou  $\alpha$ .

Finalmente, pela substituição da equação 6.20 na equação 6.19, obtemos

$$I_n^{(M)}(x; \alpha) = \frac{1}{\pi x} \sum_{m=1,3,5,\dots,M} c_m(\lambda; \tau_n) \left( \frac{2\pi^{2+m}}{2+m} \right) {}_1F_2 \left[ \begin{matrix} 1 + \frac{m}{2} \\ \frac{3}{2}, 2 + \frac{m}{2} \end{matrix} ; -\frac{\pi^2}{4} \right]. \quad (6.21)$$

Para  $x \geq 0$  e  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $I_n$  converge de modo que  $I_{n+1}(x; \alpha)/I_n(x; \alpha) < 1$  (a forma exata depende do valor de  $\alpha$ ). A figura 6.3 exhibe, para alguns valores de  $x$  e  $\alpha$ , uma boa concordância - com um erro absoluto de  $\sim 10^{-3}$  - entre a série (para  $M = 5$ ) e o integrando da equação 6.15.

Reunindo todos os cálculos anteriores, é possível escrever a distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica aproximadamente como,

$$P_\alpha(x) \approx S_K(x; \alpha) + \sum_{n=1}^{n=N} I_n^{(M)}(x; \alpha). \quad (6.22)$$

É importante enfatizar que a forma exata dos termos  $c_m(\lambda; \tau_n)$  pode ser facilmente obtida,

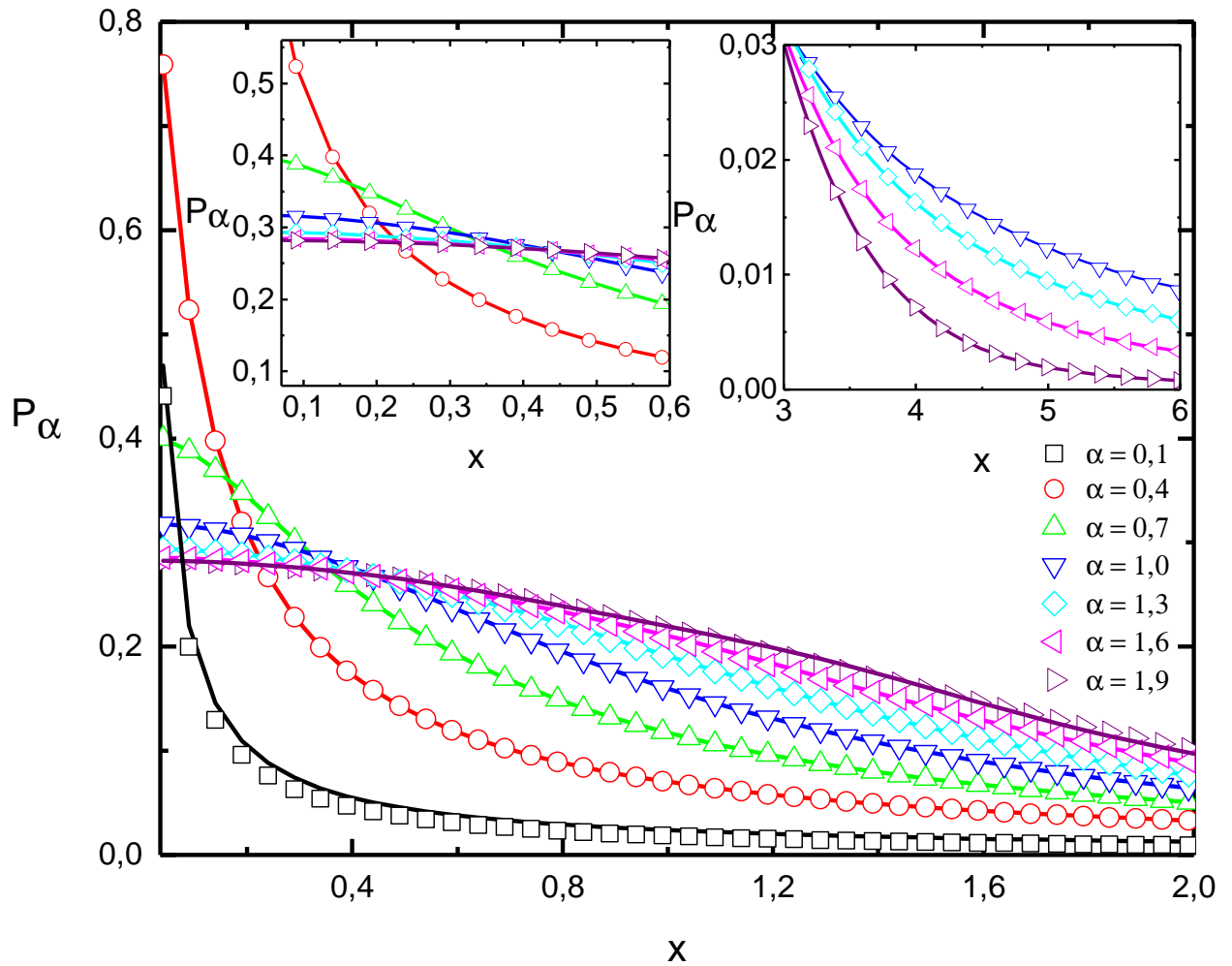


por exemplo,

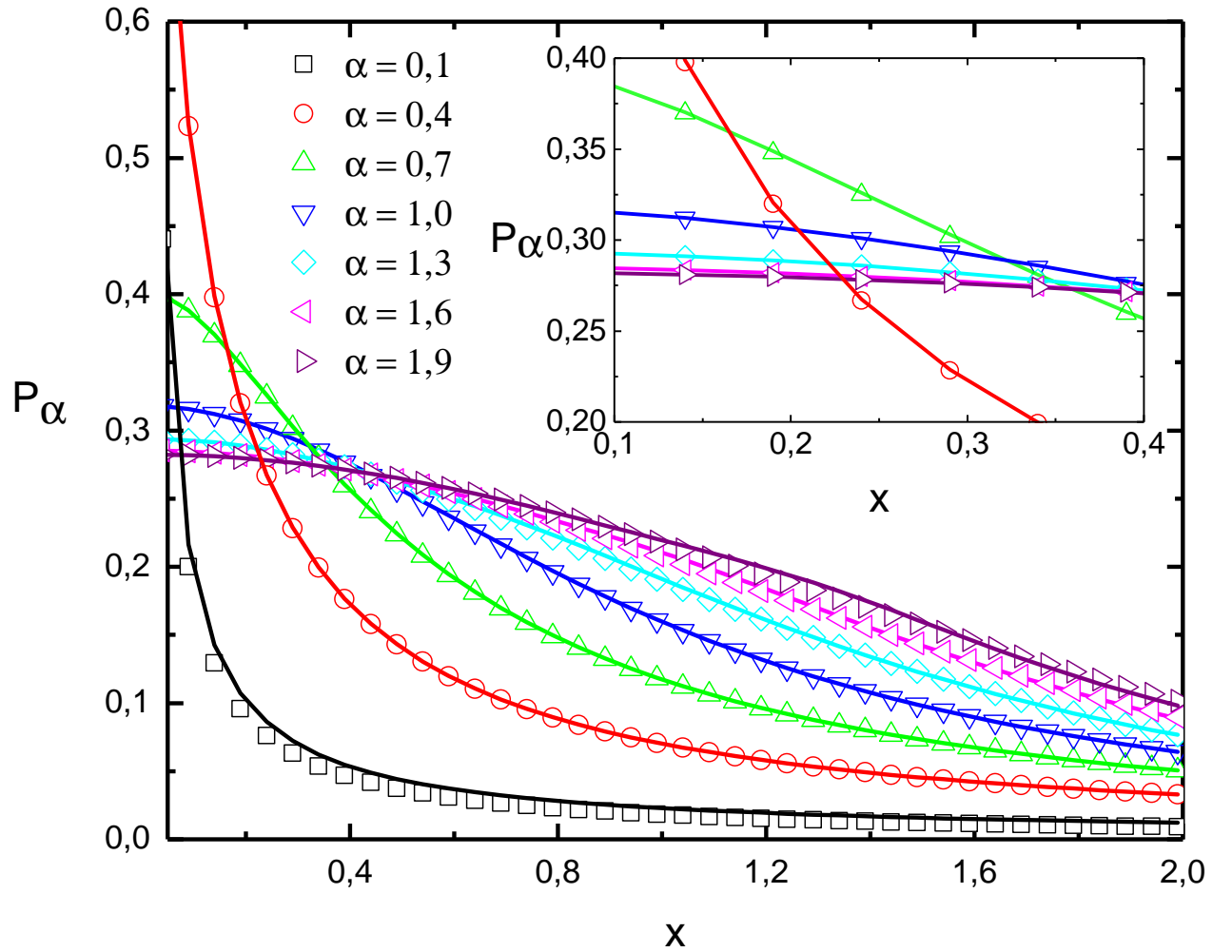
$$\begin{aligned}
 c_1(\lambda; \tau) \exp[\lambda \tau^\alpha] &= -\alpha \lambda \tau^{\alpha-1}, \\
 6 c_3(\lambda; \tau) \exp[\lambda \tau^\alpha] &= -\alpha^3 \lambda^3 \tau^{3\alpha-3} + (3\alpha - 3) \alpha^2 \lambda^2 \tau^{2\alpha-3} \\
 &\quad - \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \lambda \tau^{\alpha-3}, \\
 120 c_5(\lambda; \tau) \exp[\lambda \tau^\alpha] &= \alpha \lambda \tau^{\alpha-5} ((24 + 50\alpha(\lambda \tau^\alpha - 1)) + 35\alpha^2(1 + \lambda \tau^\alpha(\lambda \tau^\alpha - 3)) \\
 &\quad + 10\alpha^3(-1 + \lambda \tau^\alpha(7 + \lambda \tau^\alpha(\lambda \tau^\alpha - 6))) \\
 &\quad + \alpha^4(1 + \lambda \tau^\alpha(-15 + \lambda \tau^\alpha(-5 + \lambda \tau^\alpha)^2))). \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

Note que o número total de termos desta expressão (Eq. 6.22) é dado por  $T = K + 1 + N \times (M + 1)/2$ .

Para ilustrar os resultados obtidos, mostramos a equação 6.22 na figura 6.4, conjuntamente a cálculos numéricos de alta precisão da integral na equação 5.1 (usando um código desenvolvido para o programa Mathematica <sup>®</sup>). Nós mostramos seis valores de  $\alpha$  (de 0,4 a 1,9) usando  $K = N = 4$  e  $M = 5$ , ou seja, tomando apenas 3 termos na expansão das janelas  $I_n^{(5)}$ . O erro absoluto obtido foi de  $10^{-3}$ . Para  $\alpha \lesssim 1$ , foi constatado que a convergência se torna muito lenta. De modo que, no presente caso foi utilizado  $N = 10^5$ . O erro é controlado via números de janelas consideradas, de modo que, aumentando  $N$ , nós melhoramos cada vez mais a aproximação. Isto está exemplificado na figura 6.5, onde foram utilizados os mesmos valores para  $K$  e  $M$ , mas com  $N = 50$  para  $0,4 \leq \alpha \leq 1,9$  e  $N = 2 \times 10^5$ . Neste caso o erro obtido foi menor que  $10^{-5}$ .



**Figura 6.4:** Comparação para vários valores de  $\alpha \in [0, 4; 1, 9]$  do cálculo numérico da equação (5.1) (símbolos) e a aproximação em série (truncada) dada pela equação (6.22) (curvas contínuas), onde  $K = N = 4$  e  $M = 5$ . Resultados similares podem ser obtidos para outros  $\alpha$ 's (gráficos não mostrados). Para  $\alpha = 0, 1$ , o gráfico mostrado é para  $N = 10^5$ . O erro absoluto é menor que  $10^{-3}$ .



**Figura 6.5:** O mesmo procedimento mostrado na figura 6.4 porém com  $N = 50$  para  $\alpha \in [0, 4; 1, 9]$ . Para  $\alpha = 0, 1$ , foi considerado  $N = 2 \times 10^5$ . O erro absoluto é menor que  $10^{-5}$ .

## Conclusões

*“When you know that your time is close at hand maybe then you’ll begin to understand life down here is just a strange illusion.”*

---

Iron Maiden

### 7.1 Comentários Finais

Nesta tese foi apresentado um novo método para se obter formas analíticas fechadas para a distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável simétrica com parâmetro  $\alpha = 2/M$  e construímos uma série, cujo truncamento em poucos termos, descreve as distribuições estáveis simétricas para qualquer  $\alpha$  com erros da ordem de  $10^{-3}$  ( $M = 5$ ).

No capítulo 1 foi realizado um estudo sobre distribuições estáveis e a sua importância para a generalização do teorema do limite central. Foi enfatizado que apesar da grande importância destes objetos matemáticos para ciência em geral, expressões analíticas fechadas são escassas para quantidade de parâmetros (e seus valores) associados. No capítulo 2 foram descritas as principais propriedades das funções hipergeométricas, e que devido a esta ser solução da equação diferencial hipergeométrica faz com que possua associação com muitas funções, sejam elas elementares ou especiais. Isto, por sua vez, justifica a nossa procura de descrever as distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis em termos destas funções. No processo de resolução do problema nos deparamos com uma série, que para valores de

$M > 2$ , era divergente e que pôde ser denominada como uma série de potência formal. De modo que no capítulo 3 nós descrevemos a ideia geral das somas de regularização e como encontrar formas analíticas que representam estas séries por meio do método de regularização de Borel-Laplace.

É notório observar que há outros trabalhos com métodos distintos para descrever estas distribuições, sejam de formas exatas (como fizemos aqui) ou aproximada por meio de algoritmos e séries truncadas. Um em particular [34] por meio de um procedimento engenhoso (embora um pouco complicado), assumindo valores racionais para  $\alpha = l/k$  e  $\beta = (l - 2r)/k$ . Neste trabalho os autores descrevem as distribuições de Lévy por meio de funções Meijer, que são obtidas via transformada de Mellin aplicada na forma geral da distribuição de Lévy e manipulações por meio das fórmulas da reflexão de Euler e multiplicação de Gauss-Legendre [90], que podem ser desenvolvidas e os resultados podem ser convertidos em funções hipergeométricas. Em particular para  $l = 2r$  e  $k/l = M/2$  o intervalo de parâmetros coincide com o nosso caso. Contudo as expressões são distintas, onde no respectivo trabalho são do tipo  ${}_lF_k$  e no nosso caso são  ${}_1F_{M-1}$ . Isto não é nenhuma surpresa, pois as funções hipergeométricas possuem uma flexibilidade muito grande de se transformarem umas nas outras [75, 78, 87, 88].

Nesta tese também foi apresentada uma aproximação das distribuições estáveis simétricas em termos de uma série truncada com funções simples, por meio da divisão do domínio (janelas) da variável de integração da transformada de Fourier. Esta série, com poucos termos ( $k = 4$ ,  $M = 5$  e  $N = 4$ ), apresentou um erro da ordem de  $10^{-3}$  para  $\alpha \geq 0,4$ . À medida que  $\alpha$  se aproxima de zero a série se torna lenta, sendo necessário uma quantidade bem maior de termos ( $N = 10^5$ ). Há na literatura, aproximações para distribuição de Lévy, via algoritmos e expansões assintóticas [124, 125], porém vale ressaltar a complexidade desses métodos frente à simplicidade da nossa expressão, que consiste em coeficientes da série de Taylor da função exponencial, e da função gama incompleta. Ainda neste sentido, nossa expressão numérica se torna mais agradável para pesquisadores de áreas como ciências biológicas e até mesmo ciências sociais que não possuem uma alta formação matemática e precisam trabalhar com estes tipos de distribuições.

Como conclusão, temos então, uma expressão analítica fechada para distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável com  $\alpha = 2/M$  ( $M$  sendo um número inteiro) e uma expressão que é versátil e de fácil manipulação, além de uma rápida convergência para qualquer  $\alpha$ , exceto  $\alpha \approx 0$ .

Neste sentido, este trabalho contribuiu com novas fórmulas, além de novas abordagens para atacar estas distribuições cuja importância é ímpar em vários ramos da Ciência.

## 7.2 Perspectivas

Há um ano, foram apresentados os primeiros resultados do nosso trabalho através da pré-defesa, que teve a grande serventia de direcionar e contribuir na construção de uma caminho até o texto final materializado nesta tese. Naquela época, foram apresentadas perspectivas para este momento. Já havia um trabalho publicado e almejávamos novos resultados. Chegamos nesses resultados, de modo que fomos agraciados com a conclusão de nossas aspirações. Porém, cá estamos novamente, e todo este trabalho nos deixa algumas questões em aberto que nos proporcionam perspectivas:

1. Como generalizar ainda mais nosso resultado e encontrar uma forma analítica para uma gama maior de valores associados aos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ .
2. Há mais algum espectro de valores em que uma expansão similar à usada no teorema 5.2.1, e o procedimento de regularização usado no teorema 5.2.2, podem ser usados?
3. A ideia do método da janelas pode ser estendida às distribuições assimétricas ( $\beta \neq 0$ )?

Na literatura há um grande interesse nas distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis devido à sua conexão com o Teorema do Limite Central, que é fundamental para uma vasta gama de aplicações. Certamente, os questionamentos levantados acima carregam uma evidente dificuldade, e isto mostra o porque de expressões analíticas para estas distribuições serem tão escassas. Parte do estudo realizado sob o segundo item listado, deu origem ao trabalho posterior, onde foi necessário usar uma série aproximativa no lugar de uma formulação exata. Prosseguimos no ímpeto de encontrar generalizações, não só para as distribuições simétricas, como as assimétricas também. Esperamos, assim como ocorreu na pré-defesa, que tenhamos sucesso e, assim, em breve apresentar à comunidade científica novas contribuições.

## Publicações

Como reconhecimento dos trabalhos desenvolvidos nesta tese, foram publicados dois artigos:

- J.C Crisanto-Neto, M.G.E. da Luz, E.P Raposo, G.M. Viswanathan, A formal power series expansion-regularization approach for Lévy stable distributions: the symmetric case with  $\alpha = 2/M$  ( $M$  positive integer), J. Phys. A 49 (2016) 375001.
- J.C Crisanto-Neto, M.G.E. da Luz, E.P Raposo, G.M. Viswanathan, An efficient series approximation for the Lévy  $\alpha$ -stable symmetric distribution, Physics Letters A, 382 (2018) 2408-2413.

# A formal power series expansion—regularization approach for Lévy stable distributions: the symmetric case with $\alpha = 2/M$ ( $M$ positive integer)

J C Crisanto-Neto<sup>1</sup>, M G E da Luz<sup>2,5</sup>, E P Raposo<sup>3</sup> and G M Viswanathan<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59078-970, Brazil

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, C.P. 19044, 81531-980 Curitiba-PR, Brazil

<sup>3</sup> Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 50670-901, Brazil

<sup>4</sup> National Institute of Science and Technology of Complex Systems, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 59078-970, Brazil

E-mail: [nehwttoncrisanto@gmail.com](mailto:nehwttoncrisanto@gmail.com), [luz@fisica.ufpr.br](mailto:luz@fisica.ufpr.br), [ernesto@df.ufpe.br](mailto:ernesto@df.ufpe.br) and [gandhi@dfte.ufrn.br](mailto:gandhi@dfte.ufrn.br)

Received 4 May 2016, revised 25 July 2016

Accepted for publication 27 July 2016

Published 19 August 2016



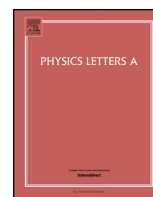
CrossMark

## Abstract

In practice, the Lévy  $\alpha$ -stable distribution is usually expressed in terms of the Fourier integral of its characteristic function. Indeed, known closed form expressions are relatively scarce given the huge parameters space:  $0 < \alpha \leq 2$  (Lévy index),  $-1 \leq \beta \leq 1$  (skewness),  $\sigma > 0$  (scale), and  $-\infty < \mu < \infty$  (shift). Hence, systematic efforts have been made towards the development of proper methods for analytically solving the mentioned integral. As a further contribution in this direction, here we propose a new way to tackle the problem. We consider an approach in which one first solves the Fourier integral through a formal (thus not necessarily convergent) series representation. Then, one uses (if necessary) a pertinent sum-regularization procedure to the resulting divergent series, so as to obtain an exact formula for the distribution, which is amenable to direct numerical calculations. As a concrete study, we address the centered, symmetric, unshifted and unscaled distribution ( $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ ), with  $\alpha = \alpha_M = 2/M$ ,  $M = 1, 2, 3, \dots$ . Conceivably, the present protocol could be applied to other sets of parameter values.

<sup>5</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.





# An efficient series approximation for the Lévy $\alpha$ -stable symmetric distribution



J.C. Crisanto-Neto<sup>a,\*</sup>, M.G.E. da Luz<sup>b</sup>, E.P. Raposo<sup>c</sup>, G.M. Viswanathan<sup>a,d</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59078-970, Natal, RN, Brazil

<sup>b</sup> Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-980, Curitiba, PR, Brazil

<sup>c</sup> Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife, PE, Brazil

<sup>d</sup> National Institute of Science and Technology of Complex Systems, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 59078-900, Natal, RN, Brazil

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 16 April 2018

Received in revised form 5 July 2018

Accepted 8 July 2018

Available online 14 July 2018

Communicated by C.R. Doering

### Keywords:

Lévy  $\alpha$ -stable distributions

Symmetric distributions

Series expansion

Approximation series

## ABSTRACT

A relevant problem in the statistical and mathematical physics literature is to derive numerically accurate expressions to calculate Lévy  $\alpha$ -stable distributions  $P_\alpha(x; \beta)$ . On the formal side, important exact results rely on special functions, such as Meijer-G, Fox-H and finite sums of hypergeometric functions, with only a few exceptional cases expressed in terms of elementary functions. Hence, from a more practical point of view, methods such as series expansions are in order, e.g., to allow for the estimation of the Lévy distribution with high numerical precision, even though most of the existing approaches are restricted to a subset of the distribution parameters and/or usually demand relatively time-consuming sophisticated algorithms. Here we present a rather simple truncated expansion for the case of symmetric Lévy distributions  $P_\alpha(x)$  ( $\beta = 0$ ). This is achieved by dividing the full range of integration into windows, performing proper series expansion inside each, and then calculating the integrals term by term. The obtained representation is convergent for any  $0 < \alpha \leq 2$ . Moreover, its accuracy is directly controlled by the number of terms in the truncated expression, being straightforward to implement numerically. As we show with different examples, for almost all allowable  $\alpha$ 's the calculations lead to  $P_\alpha(x)$  with reasonable low absolute error for computationally inexpensive simulations.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

Stochastic analysis methods are useful to describe a large number of phenomena in natural and social systems, belonging to diverse areas, including physics, biology, economics, and sociology. A fundamental result in this context is the central limit theorem (CLT) [1–4]. The generalized CLT (GCLT), due to Paul Lévy and others, has even broader implications, dealing with a whole family of stable distributions [5–9]. In the ‘classical’ case, a weak version of the CLT establishes that the sum of independent and identically distributed random variables of finite variance converges to a Gaussian distribution. The GCLT relaxes this condition of finite variance, but instead the sum converges to the so-called Lévy  $\alpha$ -stable distribution, which is parameterized by the Lévy index  $0 < \alpha \leq 2$  [10–17].

In the case of finite variance, the underlying dynamics is associated with processes presenting normal diffusion, with Gaussian propagators and mean square displacement of the particles scaling linearly with time. In contrast, a diverging variance is related to anomalous diffusion. In this case, the corresponding dynamics very often display long-range correlations, special kinds of disorder and randomness, and highly non-linear behavior. In this context, Lévy stable distributions have been used to model many-particle quantum problems [18], random lasers [19] and laser cooling [20], solid polymers [21], financial data [22], and distinct aspects of thermodynamics [23,24], to cite just few examples. It has also important links to areas such as fractional calculus, relevant in topics such as viscoelastic, anomalous diffusion, and heat transfer [25, 26].

We can represent all the possible stable distributions [1] through a Fourier transform. The  $\alpha$ -stable Lévy distribution has the probability density function  $f(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma)$  given by

$$f(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[\phi(t)] \exp[-ixt], \quad (1)$$

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [nehwtncrisanto@gmail.com](mailto:nehwtncrisanto@gmail.com) (J.C. Crisanto-Neto), [luz@fisica.ufpr.br](mailto:luz@fisica.ufpr.br) (M.G.E. da Luz), [ernesto@df.ufpe.br](mailto:ernesto@df.ufpe.br) (E.P. Raposo), [gandhi@dfte.ufrn.br](mailto:gandhi@dfte.ufrn.br) (G.M. Viswanathan).

<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.07.013>

0375-9601/© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

# Bibliografia

- [1] Krzysztof Burnecki, Recognition of stable distribution with Lévy index alpha close to 2, , arXiv:1205.6458v1 [physics.data-an] 29 May 2012.
- [2] Vasiliki Plerou, Parameswaran Gopikrishnan, Bernd Rosenow, Luis A.N. Amaral, H.Eugene Stanley, Econophysics: financial time series from a statistical physics point of view, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 279, Issues 1-4, (2000), 443-456.
- [3] Michael F. Shlesinger et al., Strange Kinetics, Nature, Vol. 363, (1993).
- [4] Sabir Umarov et al., A generalization of the central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics, arXiv:cond-mat/0603593v4 [cond-mat.stat-mech] 14 Nov 2007.
- [5] Jun-Sheng et al., Lévy stable distribution and space-fractional Fokker-Planck type equation, Journal of King Saud University-Science, 2015.
- [6] A. V. Ponomarev et al., Lévy distribution in many-particle quantum systems, Physical Review A, 81, (2010) 043615.
- [7] J.P. Nolan, Modeling Financial Data with Stable Distributions, Invited chapter in Book 1 of the Handbooks of Finance, Chapter 3, Volume editor S.T. Rachev, Series editor W.T. Ziemba, North-Holland, 2003.
- [8] Enrico Scalas and Kyungski Kim, The art of fitting financial time series with Lévy stable distributions, arXiv:physics/0608224v1 [physics.data-an] 23 Aug 2006.

- [9] Borak S, Härdle W and Weron R, Statistical Tools for Finance and Insurance, ed P Cizek et al, Springer, Berlin, p 21, 2005.
- [10] Eli Barkai, Stable Equilibrium Based on Lévy Statistics: A linear Boltzmann Equation Approach, Journal of Statistical Physics, Vol. 115, Nos. 5/6, 2004.
- [11] Rosario N. Mantegna, H. Eugene Stanley, Introduction to Econophysics, Cambridge University Press, 2007.
- [12] François bardou et al., Lévy Statistics and Laser Cooling: How Rare Events Bring Atoms to Rest, Cambridge University Press, 2002.
- [13] F. Bardou et al., Subrecoil Laser Cooling and Lévy Flights, Physical Review Letters, Vol. 72, No. 2, (1994)
- [14] Hans Ficher, A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory, Springer, 2011.
- [15] Viswanathan G M, da Luz M G E, Raposo E P and Stanley H E, The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [16] John T. Bendler, Lévy (Stable) Probability Densities and Mechanical Relaxation in Solid Polymers, Journal of Statistical Physics, Vol. 36, Nos. 5/6, (1984)
- [17] G. Samorodnitsky, M. Taqqu, Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman and Hall, New York, 1994.
- [18] C.L. Nikias, M. Shao, Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications, Wiley, New York, 1995.
- [19] I.A. Ibragimov, Y.V. Linnik, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
- [20] J. Holtsmarl, Über die Verbeiterung von Spektrallinien, Ann. Physik (4) 58 (363) (1919), 577-630.
- [21] Sato K-I, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [22] Schneider W. R., Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems, ed S Albeverio et al, Lectures Notes in Physics vol 262, Springer, Berlin, 1986.
- [23] Garoni T. M. and Frankel N. E., Lévy flights: exact results and asymptotics beyond all orders, J. Math. Phys. 43, (2002), 267089.
- [24] Hatzinikitas A and Pachos J K 2008 One-dimensional stable probability density functions for rational index  $0 < \alpha \leq 2$ , Ann. Phys. 323 (2008) 3000-19.
- [25] P. Humbert, Nouvelles correspondances symboliques, Bull. Soc. Math. Fr. 69 (1945) 121-129.
- [26] H. Pollard, The representation of  $e^{-x^\lambda}$  as a Laplace integral, Bull. Am. Math. Soc. 52 (1946) 908-910.
- [27] E.F. Fama, R. Roll, Some properties of symmetric stable distributions, J. Am. Stat. Assoc. 63 (323) (1968) 817-836.
- [28] H. Bergström, On some expansions of stable distributions functions, Ark. Mat. 2 (4) (1952) 375-378.
- [29] W. Wyss, The fractional diffusion equation, J. Math. Phys. 27 (1989) 2782.
- [30] V.M. Zolotarev, On representation of densities of stable laws by special functions, Theory Probab. Appl. 39 (2) (1995) 354-362.
- [31] R. Hilfer, Exact solutions for a class of fractal time random walks, Fractals 3 (1995) 211-216.
- [32] R. Metzler, J. Klafter, The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Phys. Rep. 339 (1) (2000) 1-77.
- [33] R. Metzler, J. Klafter, Accelerating Brownian motion: a fractional dynamics approach to fast diffusion, Europhys. Lett. 51 (2000) 492-498.
- [34] Penson K. A. and Górska K., Exact and explicit probability densities for one-sided Lévy stable distributions Phys. Rev. Lett. 105, (2010), 210604
- [35] Górska K. and Penson K. A., Lévy stable two-sided distributions: exact and explicit densities for asymmetric case, Phys. Rev. E 83 (2011) 061125.

- [36] Marco Maioli and Andrea Sacchetti, Gevrey formal power series of Winnier-Stark ladders, J. Phys. A: Math. Gen. 37, (2004), 2371-2383.
- [37] Shawyer B. and Watson B., Borel's Methods of Summability: Theory and Applications, Clarendon, New York, 1994.
- [38] Costin O., Aymptotics and Borel Summability, FL: CRC Press, Boca Raton, 2008.
- [39] Émile Borel, Leçons sur les Séries Divergentes, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire de L'observatoire de Paris et du Bureau des Longitudes, Nouvelles Lençons Sur La Théorie Des Fonctions, 1901.
- [40] Seaborn J B 1991. *Hypergeometric Functions an their Applications* (New York-NY: Springer-Verlag)
- [41] Pogány T. K. and Nadarajah S., Remarks on the stable  $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$  distribution Methodol. Comput. Appl. Probab. 17 (2015) 515-24.
- [42] Ivan Niven, Formal Power Series, The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No. 8, (1969), pp. 871-889.
- [43] Nathanson M. B. (ed), Unusual Applications of Number Theory, Providence, RI: American Mathematical Society, 2004.
- [44] Wilf H. S., Generatingfunctionology, MA: A K Peters Ltd, Wellesley, 2006.
- [45] Dalton B. J., Grimes S. M., Vary S. P. and Willians S. A. (Eds.), Theory and Applications of Moment Methods in Many-Fermion Systems, Plenum Press, New York, 1980.
- [46] Loebel M., Discrete Mathematics in Statistical Physics, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2010.
- [47] Guido Gentile *et al*, Summation of divergent series and Borel summability for strongly dissipative equations with periodic or quasi-periodic forcing terms, Journal of Mathematical Physics 46, no. 6, 062704, 21 pp, arXiv:math/0501500, (2005)
- [48] G. Parisi, The Borel Transform and the Renormalization Group, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 49, N0. 2, (1979), 215-219.

- [49] G-Compeán H., Mielnik B., Montesinos M. and Przanowski M., Topics in Mathematical Physics, General Relativity, and Cosmology in Honor of Jerzy Plebanski, World Scientific, Singapore, 2006.
- [50] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Le, Gevrey Series in Quantum Topology, arXiv:math/0609618v2 [math.GT] 13 Feb 2007.
- [51] Babich V. M., Formal power series and their applications in the mathematical theory of diffraction, J. Math. Sci. 194 (2013) 1-7.
- [52] J. D. Hill, The Borel Property of Summability Methods, Pacific Journal of mathematics, Vol. 1, No. 3, (1951)
- [53] Kunio Ichinobe, The Borel Sum of Divergent Barnes Hypergeometric Series and its Application to a Partial Differential Equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 37, (2001), 91-117.
- [54] Leo Breiman, Probability, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [55] William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol I, John Wiley and Sons. Inc. 1970.
- [56] Sheldon Ross, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, Bookman, 8ª edição, Porto Alegre, 2010.
- [57] Juergen Meinecke, Illustration of Central Limit Theorem using Monte Carlo Simulation, <http://emet2008.readthedocs.io/en/latest/clt.html>, 2014.
- [58] Jean-Nicholas Hould, Central Limit Theorem for Data Science, <https://www.kdnuggets.com/2016/08/central-limit-theorem-data-science.html>, 2016.
- [59] A. N. Kolmogorov, B. V. Gnedenko, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables Addison-Wesley Publishing Company, 1954.
- [60] William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol II, John Wiley and Sons. Inc. 1970.
- [61] Lévy, P. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

- [62] Lévy, P. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [63] Khintchine A. Ya. and Lévy, P. *Sur les lois stables*. C. R. Acad. Sci. Paris 202, (1936), 374-376.
- [64] Szymon Borak, Wolfgang Härdle, Rafal Weron, *Stables Distributions*, Humboldt-Universität zu Berlin, SFB 649, (2005)
- [65] V. M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 65, (1983)
- [66] Harald Bergstrom, *On some expansions of stable distribution functions*, *Arkiv For Matematik*, Vol. 2, No. 18, (1952)
- [67] J.P. Nolan, *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*, Birkhäuser, Boston, 2018, Note: in progress, Chapter 1 online at <http://fs2.american.edu/~jpnolan/www/stable/stable.html>.
- [68] Ph. Blanchard et al., *Heavy-tailed Distributions In Stochastic Dynamical Models*, arXiv:1105.1274v1 [math-ph] 6 May, 2011.
- [69] Machado, Kleber Daum, *Equações Diferenciais Aplicadas, Toda Palavra*, Ponta Grossa, Vol. 1, 2012.
- [70] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons, 9 Ed., 2009.
- [71] Oliveira, E. Capelas de, *Funções especiais com aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 1. ed., 2005.
- [72] katsunori Iwasaki et al., *From Gauss to Painlevé A modern Theory of Special Functions*, Vieweg, 1991.
- [73] Harry Bateman, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, Inc., United States of America, Vol. 1, 1953.
- [74] Antonius Henricus Maria Levelt, *Hypergeometric Functions*, Drukkerij Holland N.V., Amsterdam, 1961.

- [75] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [76] N. E. Norlund, *Hypergeometric Functions*, *Acta Math.* 94 (1955), 289-349.
- [77] Slater, Lucy Joan, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [78] Barnes, E. W., *A New Development of The Theory of The Hypergeometric Functions*, *Proc. London Math. Soc.*, 6 (2), (1908), 141-177.
- [79] Masaaki Yoshida, *Fuchsian Differential Equations*, A publication of the Max-Planck-Institute für Mathematik, Bonn, 1987.
- [80] Fritz Oberhettinger, *Tables of Mellin Transform*, Springer-Verlag, 1974.
- [81] Barnes, E. W., A transformation of generalized Hypergeometric series, *Quart. J. Math.* 41, 1910.
- [82] Kazuhiko Aomoto and Michitake Kita, *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer, 1995.
- [83] Clausen, T., Ueber die Falle wenn die Reihe  $y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \dots$ , *J. furr Math.* 3, 1828.
- [84] Saalschutz, Eine Summations Formel, *Zeitnchr. für math. und Physik.* 35, 1890.
- [85] Dixon, A. C., Summation of a certain series, *Proc. London Math. Soc.*, 35, 1903.
- [86] Dougall, J., On Vandermonde's theorem and some more general expansions, *Proc. Edin Math. Soc.*, 25, 1907.
- [87] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Stechert-Hafner Service Agency, 1964.
- [88] MacRobert, Proofs of some formulae for the generalized hypergeometrics equation, *Proc. Roy. Soc. Edim.* 59, 1938.
- [89] Dereziński J 2014 Hypergeometric type functions and their symmetries *Ann. Henri Poincaré* 15 1569-1653



- [90] Daalhuis A B O and Askey R A 2010 in *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Olver F W J, Lozier D W, Boisvert R F and Clark C W (Eds.) 2010 (Cambridge: Cambridge University Press)
- [91] Harry Bateman, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, Inc., United States of America, Vol. 2, 1953.
- [92] Augustin-Louis Cauchy, *Analyse Algébrique, Cours D'Analyse de L'école Royale Polytechnique*, 1821.
- [93] Augustin-Louis Cauchy, *Le Calcul Infinitésimal, Résumé Des Leçons données A L'école Royale Polytechnique*, 1823.
- [94] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise Vol: 1*, 14 ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [95] Louis Lazarus Silverman, *On The Definition of The Sum of A Divergent Series*, University of Missouri, mathematics Series, Vol. 1, No. 1, 1913.
- [96] Walter Burton Ford, *Studies On Divergent Series and Summability*, The Macmillan Company, Michigan Series, Vol. II, 1916.
- [97] V. D. Mur et al., *Summation of Divergent Series and Zeldovich's Regularization Method*, Physics of Atomic Nuclei, Vol. 68, No. 4, (2005), pp. 677-685.
- [98] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford At The Clarendon Press, 1949.
- [99] P. Dienes, *The Taylor Series an introduction to the theory of functions of a complex variable*, Dover Publications Inc. New York, 1957.
- [100] David Borwein and Tom Markovich, *Cesàro and Borel-Type Summability*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 103, No. 4, August, 1988.
- [101] Edward A. Bender, *A lifting Theorem for Formal Power Series*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 42, No. 1, 1974.
- [102] Claude Mitschi, David Sauzin, *Divergent Series, Summability and Resurgence I: Monodromy and Resurgence*, Springer, Switzerland, Lectures Notes in Mathematics 2153, 2016.

- [103] Gauss M. Cordeiro, Introdução à Teoria Assintótica, 22º Colóquio Brasileiro de Matemática
- [104] E. T. Copson, Asymptotic Expansions, Cambridge At The University Press, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 55, 1965.
- [105] A. Erdélyi, Asymptotic Expansions, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
- [106] J Enyeart , Regularization of Divergent Series and Tauberian Theorems, Allen Institute for Artificial Intelligence, 2010.
- [107] Julio Cesar Canille Martins, Desenvolvimento Assintótico e Introdução o Cálculo Diferencial Resurgente, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.
- [108] R. B. Dingle, Symptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation, Academic Press London and New York, 1973.
- [109] J. P. Ramis, Séries Divergent et Développements Asymptotiques, IMPA, Ensaios Matemáticos Sociedade Brasileira de Matemática, Vol. 6, 1993.
- [110] Liviu I. Nicolaescu, Regularization of Certain Divergent Series of Polynomials , arXiv:0905.0617v1 [math.CO] 5 May, 2009.
- [111] U. C. Guha,  $(\gamma, k)$ -Summability of Series, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 4, 1957.
- [112] Ovidiu Costin, Asymptotics and Borel Summability, CRC Press Taylor and Francis Group, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 141, 2009.
- [113] Yves André, Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey, Journal de Théori des Nombres de Bordeaux, tome 15, $n^{\circ}1$ , (2003), p. 1-10.
- [114] Michèle Loday-Richaud, Divergent Series, Summability and Resurgence II: Simple and Multiple Summability, Springer, Switzerland, Lectures Notes in Mathematics 2154, 2016.
- [115] Werner Balser, From Divergent Power Series to Analytic Funtions: Theory and Application of Multisummable Power Series, Springer-Verlag, 1994.

- [116] Kunio Ichinobe, On the relation between the Borel sum and the classical solution of the Cauchy problem for certain partial differential equations, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, Vol. XIV, No. 3, (2005) pp. 435-458.
- [117] Ernst Joachim Weniger, On the summation of some divergent hypergeometric series and related perturbation expansions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32, (1990) 291-300.
- [118] J.C Crisanto-Neto, M.G.E. da Luz, E.P Raposo, G.M. Viswanathan, A formal power series expansion-regularization approach for Lévy stable distributions: the symmetric case with  $\alpha = 2/M$  ( $M$  positive integer), *J. Phys. A* 49 (2016) 375001.
- [119] José Carlos Brunelli, Somabilidade de Borel e Séries Perturbativas, Universidade de São Paulo-Instituto de Física, Dissertação de Mestrado, 1987.
- [120] J.C Crisanto-Neto, M.G.E. da Luz, E.P Raposo, G.M. Viswanathan, An efficient series approximation for the Lévy  $\alpha$ -stable symmetric distribution, *Physics Letters A*, 382 (2018) 2408-2413.
- [121] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGrawHill, 1976.
- [122] Miyake, Masatake and Ichinobe, Kunio, On the Borel summability of divergent solutions of parabolic type equations and Barnes generalized hypergeometric functions, *Microlocal Analysis and Related Topics*, 2000.
- [123] E. W. Barnes, The Asymptotic Expansion of Integral Functions Defined by Generalised Hypergeometric Series, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. s2-5, 1906.
- [124] J.P. Nolan, Numerical calculations of stable densities and distribution functions, *Stochastic Models* 13 (1997) 759-774.
- [125] J. Wuttke, Fourier transform of the stretched exponential function: analytic error bounds, double exponential transform, and open-source implementation libkww, *Algorithms* 5 (2012) 604-628.